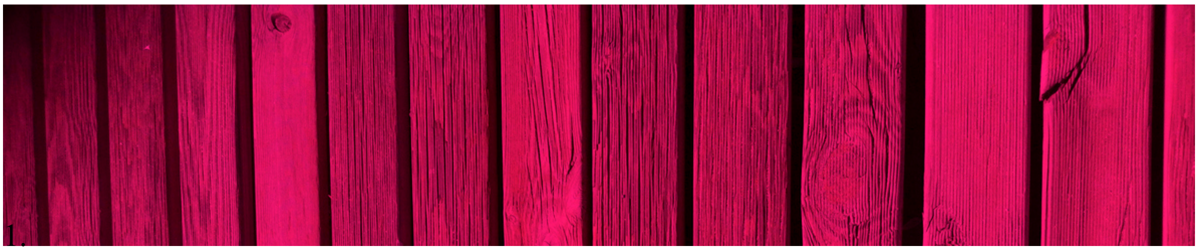

INNOVACION EN MATEMÁTICAS

por PAUL R. HALMOS
Septiembre, 1958

Todo el mundo sabe que durante los 300 últimos años las innovaciones en ciencia y tecnología se han ido sucediendo a un ritmo cada vez más acelerado. Prácticamente todo el mundo percibe que las matemáticas han desempeñado un papel central en este progreso, y, sin embargo, por extraño que parezca, mucha gente piensa que las matemáticas mismas son como un arte estático, un cuerpo de verdades eternas, que fue descubierto por unos cuantos personajes antiguos que se alejan en la sombra, y que ingenieros y científicos pueden utilizar a medida que lo necesitan.

Por supuesto que nada podría estar más lejos de la realidad. La matemática está perfeccionándose, cambiando y creciendo cada día. De su crecimiento depende no solamente el progreso de todas las otras investigaciones fundamentales, sino también nuestro progreso en las situaciones más prosaicas y coti- dianas de la vida.

A John van Neumann le agradaba citar este ejemplo de la relación entre el desarrollo tecnológico y la matemática pura. Hace ciento cincuenta años, uno de los problemas más importantes de la ciencia aplicada, del cual dependía el desarrollo de la industria, del comercio y del gobierno, era el problema de salvar vidas en el mar. Las estadísticas de las pérdidas eran terroríficas. La cantidad de dinero y esfuerzos gastados en resol- ver el problema eran también terribles, y a veces absurdos. Ningún aparato por complejo que fuese era demasiado ridículo para ser dejado a un lado. Trasatlánticos equipados con estabilizadores como cierto tipo de canoas tal vez hayan parecido curiosos, pero valía la pena probarlos.

Al tiempo que los dirigentes del gobierno y de la industria fomentaban desesperadamente tales experimentos estrafalarios, los matemáticos iban des- arrollando una herramienta que iba a salvar más vidas que las que todos los chiflados inventores se hubieran atrevido a esperar salvar. Esa herramienta es lo que ha llegado a ser conocido como la teoría de funciones de una variable compleja (una variable que contiene el número «imaginario» y la raíz cuadrada de menos uno). Entre las muchas aplicaciones de esta noción puramente matemática, una de las más fructíferas es la teoría de la comunicación por radio. Desde el matemático Karl Friedrich Gauss al inventor Guglielmo Marconi hay solamente unos pocos pasos que casi cualquier par de genios, tales como James Clerk Maxwell y Heinrich Hertz, podrían recorrer fácilmente.

La lista de innovaciones matemáticas podría ser continuada casi sin fin. He aquí solamente unas pocas más. La teoría de grupos, por ejemplo, fue des- arrollada hace cerca de cien años. A los contemporáneos de Gauss, les hubiera podido parecer tal vez una invención antiestética e inútil. Hoy día es parte del repertorio matemático de todo físico. Hasta hace tan solo cincuenta años, no había ni un solo profesor de estadística en Estados Unidos. Ahora, los métodos estadísticos son una herramienta obligada en tales ciencias como la genética y la psicología experimental. La teoría de juegos de Von Neumann, publicada por primera vez en 1928, y revitalizada veinte años más tarde, parece estar encontrando aplicaciones importantes en economía e investigación operativa.

Finalmente, para que nadie crea que las ideas matemáticas brotan perfectas y maduras de las mentes de sus creadores, recordemos que después de dos mil años las famosas demostraciones geométricas de Euclides resultaron contener serias lagunas. Los eslabones que faltaban en este razonamiento fueron, finalmente, elaborados por el gran matemático alemán, David Hilbert, alrededor de comienzos de siglo.

Admitiendo, por tanto, que existen innovaciones en matemáticas, tratemos de ver en qué consisten y, si es posible, cómo se producen. Un medio de clasificar una contribución matemática es el siguiente: puede ser una demostración nueva de un resultado antiguo, puede ser un nuevo resultado, o puede ser un tratamiento nuevo referente a varios resultados al mismo tiempo.

Una gran parte de la actividad de los matemáticos profesionales consiste en la búsqueda de demostraciones nuevas de resultados viejos. Una razón para ello es el puro placer; existe un goce es- tético, consistente en obtener un nuevo punto de vista de un paisaje familiar. Otra razón es que el creador original raramente alcanzó

su objetivo por la ruta más breve, más elegante, más eficiente, y raramente llegó a apreciar las conexiones entre la creación de su mente y todos los otros campos de la matemática. Esto está relacionado con una motivación distinta y muy práctica. Las matemáticas han crecido tan exuberantemente en los últimos dos mil años que necesitan ser continuamente pulidas, simplificadas, sistematizadas, unifica- das y condensadas. De otro modo el
problema de pasar la antorcha a cada nueva generación llegaría a ser casi completamente imposible. Nadie hoy día puede conocer, ni aun esquemáticamente, todas las matemáticas publicadas en los últimos diez años. A fin de proporcionar a los profesionales en cada campo conocimientos suficientes para que puedan progresar inteligente- mente, es de necesidad absoluta encontrar constantemente demostraciones nuevas más breves y más simples y que al mismo tiempo sean más iluminadoras y provean mayor comprensión que las precedentes.

Es curioso, por otra parte, que a veces sea útil encontrar una demostración nueva, aun siendo más complicada que una antigua. Si la nueva demostración establece algunas conexiones previa- mente insospechadas entre dos ideas, a menudo conduce a una generalización que hace la tarea de los futuros estudiantes bastante más fácil de lo que era para sus maestros.

La geometría coordenada o "analítica" de Descartes es un buen ejemplo. Una consecuencia de la innovación de Descartes es que resulta posible probar toda proposición de la geometría de Euclides por medios algebraicos Las cualidades de la geometría analítica son muchas y grandes, pero entre ellas no figura la simplicidad de las demostraciones, sobre todo cuando se las compara con las de Euclides. En la mayor parte de los casos la demostración analítica de un hecho de la geometría de Euclides acerca de triángulos o círculos es un cálculo enrevesado que no nos en- seña nada.

El valor de la geometría analítica es que manifiesta una conexión entre dos ramas de la matemática, algebra y geometría, que se había pensado que estaban totalmente separadas. Una de las preocupaciones principales de los geómetras antiguos era la de las secciones cónicas, las curvas que están formadas cortando un cono con un plano. Esto es obviamente un modo puramente espacial de pensar sobre las figuras. Cuando las secciones conicas (elipse, parábola e hipérbola) son representadas en coordenadas cartesianas, y se escriben sus ecuaciones algebraicas, resulta que to- das las ecuaciones contienen los cuadrados de x y de y, pero ninguna potencia más elevada. He aquí un nuevo hecho que proporciona una comprensión más profunda de la naturaleza de las curvas, y también sugiere una nueva cuestión: ¿cuál es la imagen geométrica de las curvas que contienen potencias más elevadas de x y de y? De esta forma nos vemos conducidos a considerar una clase entera y nueva de figuras geométricas a la cual nos hubiera conducido nuestra intuición espacial por sí sola. Además, representando las ecuaciones geométricamente, obtenemos una comprensión más profunda de su estructura algebraica.

Por supuesto la mayor parte de las demostraciones nuevas representan un avance en simplicidad así como en com prensión. Consideremos, por ejemplo, el problema de encontrar el área de la región plana limitada por la trayectoria parabólica de un proyectil y el segmento rectilíneo que une el cañón y el blanco. Esto es un problema que Arquímedes pudo resolver y resolvió de hecho. Su solución depende del famoso «método de exhaución», un modo de encontrar áreas complicadas sumando muchas áreas simples. La solución de Arquímedes es, al mismo tiempo, ingeniosa y larga. El problema puede también ser resuelto, en una sola línea, por cualquier estudiante mediocre de cálculo. Por supuesto, la solución eficiente de este estudiante es el producto del pensamiento profundo de muchos matemáticos a través de muchos años.

Ciertas demostraciones aisladas pue- den llegar a ser más breves, pero sólo porque han sido sumergidas en con- textos más amplios de los cuales es fácil extraer las. Estos contextos más amplios se extiende y mezclan con otros conceptos generales, formando un todo unificado aún más amplio. Después de un par de siglos, diez de los descubrimientos más grandes de la era correspondiente, podrán tal vez encontrarse juntos en- tre las cubiertas de un volumen en la cartera de un estudiante graduado que, con suerte, los asimilará en dos o tres meses.

Esto por lo que se refiere a demostraciones nuevas. ¿Qué hay acerca de resultados nuevos? En un sentido, todos nosotros hemos descubierto resultados matemáticos nuevos. Obtenemos uno cada vez que sumamos una columna de cifras de nuestra cuenta corriente, por ejemplo. Es probable que nadie haya jamás observado anteriormente que la suma precisamente de aquellas cifras es lo que es. Un resultado matemático nuevo realmente interesante tiene mucha más amplitud y generalidad. He aquí un ejemplo que no es exactamente lo que llamaríamos reciente (fue demostrado por Leonhard Euler hace unos doscientos años), pero tal vez sea nuevo para los no matemáticos. Todo número entero positivo es la suma de, a lo sumo, cuatro cuadrados. Los cuadrados son, por supuesto, uno, cuatro, nueve, dieciséis, etc. Entre ellos la distancia es cada vez más grande Si sumamos los cuadrados de dos en dos (repeticiones tales como 4 + 4 son permitidas), obtenemos una sucesión de números con menos huecos que antes. Si añadimos todos los números que sean sumas de tres cuadrados, obtenemos aún menos huecos. El teorema de Euler dice que si añadimos todos los números que son sumas de cuatro cuadrados, entonces no existirá ningún hueco. Otro ejemplo de un hecho matemático que tampoco es ya nuevo, pero que ilustra el papel que la innovación matemática puede desempeñar, es la teoría de la resolubilidad de ecuaciones. Fue creada por el joven genio francés Evariste Galois en la primera parte del siglo XIX. Los predecesores de Galois habían encontrado fórmulas generales para resolver ecuaciones de cuarto grado, esto es, ecuaciones en las que la incógnita está elevada a una potencia no más alta que cuatro (recuérdese la fórmula cuadrática elemental de álgebra que resuelve las ecuaciones de segundo grado). Naturalmente se esperaba que existirían también fórmulas para resol- ver las ecuaciones de grado más elevado, y se consumió una cantidad enorme de tiempo y de esfuerzo tratando de buscarlas.

Galois tuvo e! atrevimiento de dudar de la existencia de tales fórmulas generalizadas. Atacó el problema desde un punto de vista distinto" buscando no ya trucos que pudieran proporcionar las supuestas fórmulas misteriosas, sino tratando de encontrar propiedades más generales de las ecuaciones y de sus soluciones. Su trabajo condujo al concepto importante y útil de grupo, conjunto de objetos para los cuales se de- fine una operación semejante a la multiplicación Un resultado inmediato de su construcción intelectualmente bella y profunda fue el confirmar su duda.

No existen fórmulas generales para la solución de todas las ecuaciones algebraicas. De esta forma llegó a descubrir un nuevo resultado. El trabajo de Galois es un ejemplo del tercer tipo de innovación: e! tratamiento nuevo. La teoría de grupos ha resultado ser una herramienta de valor incalculable para atacar un espectro de problemas enormemente amplio. Por otra parte, las ideas de Galois pusieron en claro otra conexión sorprendente entre álgebra y geometría. Pusieron de manifiesto que los antiguos enigmas famosos de la cuadratura de! círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo no tienen soluciones generales. Los reflejos del nuevo tratamiento de Galois pueden todavía observarse en el álgebra moderna.

¿De dónde procede una innovación matemática? A veces, pero de ninguna forma siempre, la fuente está fuera de las matemáticas. De la misma forma que las matemáticas pueden hacer contribuciones a la ingeniería, física, psicología, genética, economía y otras disciplinas, estas disciplinas pueden mantener la creatividad matemática despierta suscitando cuestiones estimulantes, apuntando nuevas líneas de desarrollo o, cuando menos, proporcionando un lenguaje sugestivo para la expresión de ideas matemáticas. Alguna vez ha sucedido que cuando un físico necesitaba una teoría matemática ésta estaba ya allí esperando que se la escogiera y que se la usara. Pero más a menudo sucede que cuando se necesita algo nuevo para tales aplicaciones, el mensaje se cuela en la torre de marfil del matemático en unas pocas décadas (o más) y la respuesta baja después de un cierto intervalo de tiempo.

Las matemáticas nuevas a menudo se producen motivadas por mera curiosidad. La clase adecuada de curiosidad matemática es una cualidad preciosa que solamente pertenece a los profesionales de la más alta categoría. El problema más duro para un joven matemático es encontrar un problema. La cuestión exacta, bien formulada, representa más de la mitad de la batalla y a menudo la única parte que requiere inspiración. La respuesta misma puede ser difícil, y puede requerir ingenio en el uso de técnicas conocidas, pero a menudo sucede que todo el entusiasmo de la creación y comprensión están con- centrados en la pregunta.

Tal vez debería quedar mencionado que después de que la cuestión está formulada e! matemático no procede (en contra de lo que a menudo se supone) como un Sherlock Holmes científico. Un matemático no es una máquina deductiva, sino un ser humano. Las matemáticas nuevas no le llegan por puro razonamiento y deducción, sino por sudor, experimento, inducción y, si es afortunado, inspiración. Por supuesto, un experimento matemático no implica el uso de alambres, tubos y líquidos burbujeantes. Consiste más bien en un examen detallado de algunos casos particulares o análogos al resultado deseado. (Ejemplo: escríbanse los primeros diez cuadrados y escríbanse sistemáticamente todos los números que puedan ser obtenidos como suma de dos; tres o cuatro de estos cuadrados). Sobre la base de tales experimentos, el mate- mático salta inductivamente a conclusiones audaces. Puede entonces ser una tarea difícil demostrarlas, pero a me nudo la ordenación puramente deductiva del trabajo es útil más para comunicar los resultados que para establecerlos.

Volviendo a la fuente de innovaciones, debería decirse que los matemáticos dan a participar de su curiosidad y de su conocimiento a otros. Al comienzo de su carrera, un estudiante a menudo supera en curiosidad a sus maestros. Los grandes matemáticos hacen esencialmente lo mismo cuando deciden atacar un problema que sus predecesores no pudieron resolver. El mismo Galois resolvió problemas que él mismo no creó. Existirán siempre problemas abiertos de días pasados. Dos famosos ejemplos que no están completamente arrumbados son el problema de los cuatro colores y el último teorema de Fermat es propiamente, puesto que no ha sido demostrado, la última conjetura de Fermat). Los matemáticos de este siglo han sido particularmente afortunados al tener una inspirada lista de problemas sobre los que trabajar. Consta de veintitrés cuestiones de investigación propuestas por David Hilbert y presentadas en el Congreso Inter- nacional de Matemáticos de París de 1900. Varios de los problemas han sido resueltos (haciendo famosos a sus respectivos autores). Muchos de ellos están todavía abiertos.

Las aplicaciones prácticas, la curiosidad y la historia son los manantiales principales de innovación, pero hay otros dos que también deberían ser mencionados. Uno es el fracaso; el otro, el error. Todos los que hasta ahora han tratado de demostrar la conjetura de Fermat han fracasado, pero algunos de los esfuerzos han proporcionado los conceptos más fructíferos en el álgebra moderna y en la teoría de números. En cuanto al error, libros enteros llenos de brillantes matemáticas han sido inspirados por él. Un descuido o una falsa proposición del matemático X es a me- nudo lo único que necesita el matemático Y a fin de encontrar la verdad. Si resulta que X e Y coinciden, tanto mejor.

Después de haber examinado algunos aspectos de las fuentes de creación matemática volvamos a las creaciones mismas. Tal vez la innovación aislada más grande de los últimos cien años es la teoría de conjuntos, inventada por el matemático alemán Georg Cantor. En ella encontramos algunas demostraciones nuevas de hechos antiguos y también encontramos muchos, muchísimos nuevos resultados. Y lo más importante de todo, encontramos un nuevo tratamiento que ha cambiado completamente los métodos y el espíritu de todas las matemáticas, desde las cuestionas filosóficas más profundas acerca de sus fundamentos hasta los problemas más intrincados del álgebra clásica, de la geometría y del análisis.

Al contrario que muchas teorías científicas modernas ésta está basada en una noción sumamente simple y familiar. La palabra «conjunto» significa precisa- mente lo que dice, una colección de objetos o entidades abstractas (tales como números o puntos). Las letras de esta página forman un conjunto. Todos los números impares forman otro. De este concepto aparentemente trivial fluye una corriente sorprendente de riquezas matemáticas.

Un resultado antiguo del que Cantor encontró una demostración nueva im portante por medio de la teoría de conjuntos es el de la existencia de dos tipos de números llamados algebraicos y trascendentes. A fin de percibir la diferencia entre ellos, consideremos los números que nos encontramos en el álgebra. En un problema típico comenzamos con una ecuación, por ejemplo, x" - $2x'$ -|- 3 =c O, y buscamos el valor o valores de x que la satisfacen. Para definir un número algebraico, procedemos en dirección contraria. Comenzamos con un número y buscamos una ecuación que el número satisfaga. A fin de formulario más precisamente, un número se llama algebraico si es solución de una ecuación tal como

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

donde *a, b,* e, *d,* etc., son números ordinarios enteros (posiblemente negativos y aun posiblemente iguales a cero). Un número que no es algebraico se llama trascendente.

Ahora bien, existe un número infinito de ecuaciones con un número infinito de soluciones diferentes; por tanto, existen un número infinito de números algebraicos. Entonces surge la cuestión: ¿Existen números trascendentes? Cantor sabía la respuesta (es afirmativa). Sin embargo, su demostración fue construida de una forma completamente original. Consideró el conjunto de todos los números y el conjunto de los números algebraicos. Halló entonces un modo de comparar los tamaños de estas colecciones infinitas de números.

A fin de comparar conjuntos finitos, lo que hacemos es simplemente contarlos. Así, por ejemplo, no hay dificultad ninguna en mostrar que el conjunto de todas 2as consonantes inglesas es mayor que el conjunto de todas las vocales. Cantor inventó una especie de cómputo generalizado que puede ser aplicado a conjuntos infinitos Pudo entonces demostrar que el conjunto de todos los números es inequívocamente más grande que el conjunto de los números algebraicos. Así el asunto queda resuelto: los números trascendentes deben existir en gran cantidad.

Muchos resultados nuevos acerca de los números y de otros sistemas matemáticos han sido hallados por los métodos de Cantor. Su contribución más impresionante, sin embargo, fue su nuevo punto de vista al que ha sido convertido casi el mundo entero matemático. En lugar de considerar números individuales, o puntos, o funciones, el matemático poscantoriano considera grandes conjuntos de números, puntos o funciones. Estos tienen propiedades que no pueden ser adscritas a elementos individuales, pero que, sin embargo, arrojan alguna nueva luz sobre los elementos. Un conjunto de dos (o más) personas pueden andar cogidos de! brazo, pero una persona no lo puede hacer. Podemos conocer algo nuevo acerca de una persona por su compañía.

Como ejemplo más bien extravagante, supongamos que un europeo continental está asistiendo al partido de fútbol *Princenton-Yale.* En el descanso, una de las bandas desfila sobre el campo. El europeo tiene unos prismáticos de largo alcance con los cuales puede inspeccionar a los músicos uno por uno. El color de sus charreteras no significa nada para él, de manera que no puede decir a qué universidad pertenecen. Pero si deja sus prismáticos y observa que la banda entera está formando la letra PI desfilar, entonces puede probablemente decidir que se trata de Princenton. Por supuesto que también podría ser la banda de Yale en un gesto de cortesía, pero la idea general es clara. La estructura de un conjunto puede informar acerca de sus miembros.

El matemático clásico estaba interesado en problemas aislados. Frente a un sistema de ecuaciones se pregunta: ¿Existen soluciones? Si es así, ¿cómo es cada una de las soluciones? El matemático moderno intenta también conocer la respuesta a estas cuestiones, pero trata el problema de una manera diferente. Podría empezar, por ejemplo, preguntándose: ¿Es la suma o el producto de dos soluciones también una solución? Esta es una pregunta sobre la estructura del conjunto de todas las soluciones posibles. Si la respuesta es que sí, sabe que se trata de un tipo particular de conjunto (por ejemplo, un grupo) y esto le da información importante acerca de las soluciones aisladas.

Algunos problemas conducen a conjuntos complicados y difíciles. Consideremos algunos conjuntos de puntos que pueden ser escogidos en una línea recta fija. (Supongamos que la línea está graduada como un termómetro. Existe un punto marcado con e! cero con números positivos a un lado y negativos a otro.) Comencemos con algunos conjuntos simples: e! conjunto de todos los puntos encima del cero (los números positivos), el conjunto de todos los puntos (podríamos decir también números) entre 2 y 7, el conjunto de todos los números por debajo de -2. Todos estos conjuntos se conciben fácilmente. Son conjuntos de todos los días, y pueden ser fácilmente representados en diagramas geométricos Supongamos ahora que consideramos los puntos entre los números enteros como decimales y construyamos el conjunto de todos aquellos puntos con un número impar positivo a la izquierda de la coma. Esto no es aún demasiado difícil. Con un pequeño esfuerzo mental nos podemos imaginar este conjunto y representarlo geométricamente Pero, ¿qué decir del conjunto de puntos en cuya representación decimal nunca aparece la cifra 6? Es un conjunto definido de una forma perfectamente razonable y conocemos bastante acerca de él. Sabemos, por ejemplo, que el punto *11/20* (0,55) y el punto *8/7* (1,142857 142857 ...) pertenecen a este conjunto y que el punto PI (3,14159265 ...) no pertenece. El diagrama geométrico del conjunto es probablemente imposible de imaginar y aun así este conjunto es mucho más simple que algunos que los matemáticos se ven _ forzados ordinariamente a estudiar. A fin de mostrar solamente una complicación adicional posible, consideremos el conjunto de puntos en cuya representación decimal la cifra 6 puede o puede no aparecer, pero nunca debe aparecer seis veces consecutivas. Sabemos de nuevo algo acerca de este conjunto, conocemos, por ejemplo, que *11/20* y *817* pertenecen todavía a él. No hay nadie en el mundo que pueda decidir si e! número PI pertenece al conjunto o no.

Por supuesto, los matemáticos desde mucho antes que Cantor habían ido estudiando ciertas clases de conjuntos (por ejemplo, líneas, triángulos, circulos, etc.), aun cuando no pensaron acerca de tales conjuntos en los mismos términos. En los primeros tiempos de la teoría de conjuntos, muchos matemáticos aceptaron la idea con más entusiasmo que discreción. Cualquier conjunto tenía derecho a la existencia. El resultado fue la anarquía matemática. Este afán de originalidad incluso condujo a algunos profesionales a preferir los conjuntos más estrafalarios e irregulares a los conjuntos coherentes, de buen comportamiento, de los días antiguos. Este radicalismo no fue bien venido por todos. El gran matemático francés Henri Poincaré hizo notar en cierta ocasión: «Generaciones posteriores considerarán la teoría de conjuntos como una enfermedad de la cual nos hemos recuperado.»

Pero después de estos excesos juveniles, la matemática poscantoriana se serenó hasta llegar a una evaluación madura y responsable de sí misma y de su valor en la historia. El tratamiento a través de la teoría de conjuntos es ahora inculcado a los jóvenes matemáticos prácticamente desde la cuna, y como resulta de ello, está incorporado de tal forma en sus venas que ha llegado a perder casi todo su carácter de controversia. Ha resultado ser uno de los temas unificadores más poderosos de la historia de las matemáticas, un tema que revela conexiones entre regiones e ideas aparentemente remotas.

¿Qué hay en las matemáticas de hoy que catalizará las controversias de mañana y vendrá a ser la ortodoxia del pasado mañana? Nadie lo puede predecir. Tal vez es necesario que pase una década, o un siglo, para encuadrar una innovación matemática en su propio marco. Pero de una cosa podemos estar ciertos. En tanto que exista un mundo con matemáticos, la innovación continuará. Las nuevas ideas serán estudiadas, algunas veces aplicadas a problemas prácticos y siempre disfrutadas. #