El número real

Felipe E. Ramírez Martínez PhD.

En esta unidad aprenderás:

- Que son necesarios otros números además de los racionales.
- Qué distingue a los números reales de los racionales.
- Cómo podemos aproximarnos a un número irracional.
- Cuáles son los tres números irracionales más importantes.
- Cómo nos servimos de los números irracionales en la práctica científica y técnica.

Además

- Conocerás lo que significa que un conjunto sea denso.
- El concepto de numerabilidad.

Esta unidad nos presenta una faceta universal de la matemática: la detección de una deficiencia en sus estructuras y la solución proporcionada. Los números racionales fueron conocidos y utilizados por las primeras civilizaciones occidentales. Los babilonios y los egipcios utilizaban con destreza las fracciones. Los griegos las elevaron a la cima del universo matemático. Pero, paradojas del destino, los propios pitagóricos hallaron su incompletitud para representar el universo. El símbolo que representaba a esta milenaria secta filosófica contenía la prueba de la existencia de otros números que no eran racionales. Los números irracionales habían hecho acto de presencia en la matemática.

Pero no sería hasta mediados del siglo XIX cuando se construyeron formalmente los números reales, el gran conjunto de números que proporciona respuestas a la geometría. al dar un modelo para la recta continua, la que dibujamos habitualmente y es el conjunto sobre el que se desarrollarán los conceptos matemáticos que estudiarás en el futuro.

Si bien su conocimiento completo, el de sus propiedades, es difícil y amplio, este tema presenta a tales números como *diferentes* de los que has utilizado hasta el momento. Pero, lo que es más importante, como *necesarios* para describir el mundo. Aún así, verás a lo largo del tema, como la *simplificación* de la realidad que proporcionan los números racionales no es tan mala. En la *práctica* la medida de las cosas es siempre racional.

Unidad 1 El número real

Antes de empezar a conocer los números reales es importante que recordemos algo sobre los números racionales.

RECUERDA

LOS NÚMEROS RACIONALES

Hasta la fecha has estudiado tres conjuntos de números: los números Naturales, los Enteros y los Racionales.

Recuerda que los racionales son los números que se representan mediante una fracción de números enteros. De ellos sabemos que admiten:

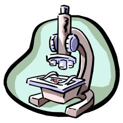
- una expresión en forma de fracción $\frac{p}{q}$ con p y q números enteros
- una expresión en forma de decimal $E,d_1d_2d_3d_4\cdots$ con la característica de que o bien el número de decimales es finito, o es infinito pero periódico.

Además sabemos cómo cambiar de la forma de fracción a la decimal y viceversa.

ES IMPORTANTE NO OLVIDAR ESTAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS RACIONALES PARA ENTENDER LO QUE INVESTIGAREMOS A CONTINUACIÓN.

Vamos a estudiar si existen otros tipos de números a través de tres investigaciones obtenidas de sencillas manipulaciones matemáticas. Con ellas te mostraremos que es necesario ampliar los conjuntos de números que la Matemática necesita.

INVESTIGACIÓN



HAY OPERACIONES EN LAS QUE APARECEN NÚMEROS NO RACIONALES

Hasta ahora cuando realizabas una operación no habías reparado en el tipo de los números que aparecían en ella.

Ya que los únicos números que conoces son los NATURALES (de contar), o ENTEROS (de contar en dos sentidos) o RACIONALES (decimal finito o periódico), parece lógico pensar que siempre que realicemos una operación, o busquemos el número que resuelve una ecuación, estaremos operando con números de éstos ¿por qué iba a ser de otro modo? ¿Es que acaso hay otros números?

Pues bien hay infinidad de situaciones en las que la solución de un problema, es un número que no pertenece a ninguno de estos conjuntos numéricos.

Veamos a continuación un ejemplo.

El número x tal que $6^x = 100$ no es un número RACIONAL.

Supongamos que buscamos un número x que sea solución de la ecuación $6^x = 100$, es decir un número x tal que la potencia correspondiente de 6 valga 100. Aún sin conocer exactamente qué número es ése, podríamos preguntarnos por el tipo de número que será.
Veamos qué sucede.

- *x* no puede ser un número NATURAL porque $6^2 = 36 < 100 < 6^3 = 216$, y entre 2 y 3 no hay ningún número natural.
- *x* no puede ser un número ENTERO exactamente por la misma razón.

Así que deberemos aceptar que x ha de ser un número RACIONAL ya que no conocemos más tipos de números.
Sin embargo esto último es falso: el número x que buscamos NO ES un número RACIONAL.
Vamos a demostrar esta afirmación:

Supongamos que $x = \frac{p}{q}$, decir, que x es un número racional y por tanto hay una expresión en forma de fracción para él. Vamos a ver que esto no puede ser así.

Si fuera $x = \frac{p}{q}$

entonces $6^{\frac{p}{q}} = 100$

y por tanto $\left(6^{\frac{p}{q}}\right)^q = 100^q$

de forma que $6^p = 100^q$

Es decir que alguna potencia de 6 ha de ser igual a alguna potencia de 100.
PERO ESTO NO PUEDE SUCEDER PORQUE TODAS LAS POTENCIAS DE 6 ACABAN EN 6 Y TODAS LAS DE 100 ACABAN EN 0.

Así que tenemos que admitir que "**EL NÚMERO x TAL QUE $6^x = 100$**" **NO ES RACIONAL**.
Veremos en seguida el significado de esta conclusión, es decir qué quiere decir que este número no sea racional.

INVESTIGACIÓN

HAY SEGMENTOS CUYA MEDIDA NO ES UN NÚMERO RACIONAL

En otras ocasiones, es la Geometría la que nos proporciona una situación en la que los números racionales no son adecuados para resolver el problema de una medida.

Si nos preguntáramos ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1? no nos sería difícil hallar su valor:

Por el Teorema de Pitágoras la hipotenusa del triángulo de la figura 1 medirá $h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Es decir de modo natural existe un segmento que forma parte de una figura geométrica muy simple, el triángulo, que mide exactamente $\sqrt{2}$.

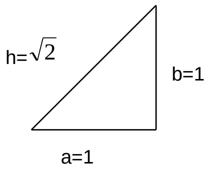


Figura 1

Veamos que este número, el que representa la longitud del segmento hipotenusa anterior, tampoco es un número racional.

$\sqrt{2}$ no es un número RACIONAL

¿Qué significa esto? Para empezar, podríamos decir que no es posible escribir su valor como la relación entre un número entero y otro. Es decir que no se puede representar de la forma $\frac{p}{q}$. Por lo tanto tampoco existirá una expresión decimal de dicho número, ya sea finita (decimal exacto) o infinita periódica (decimal periódico) ya que sabemos que todo número racional admite una de estas dos formas de expresión.

Veamos qué sucedería si suponemos que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

0.- $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ *(ec.1)*

1.- Suponemos que *p* y *q* no tienen divisores comunes o lo que es lo mismo, que la fracción no se puede simplificar.
Te preguntarás ¿y como sabemos que es así?, ¿es que no pueden tener divisores comunes p y q? Efectivamente pudieran tenerlos, pero si fuera así, simplificaríamos la fracción y estaríamos en lo cierto: *p* y *q* no tienen divisores comunes.

2.- La ecuación anterior se puede escribir

$\sqrt{2}q = p$ (ec.2)

$(\sqrt{2}q)^2 = p^2$ (ec.3)

$(\sqrt{2})^2 q^2 = p^2$ (ec.4)

$2q^2 = p^2$ (ec.5)

3.- Fíjate en la última relación, la ecuación 5: significa que p^2 es el doble de q^2.
Así que $\boldsymbol{p^2}$ es par. Como $\boldsymbol{p^2}$ es cuadrado de $\boldsymbol{p}$, si te fijas en la siguiente tabla, podremos averiguar algo más sobre *p*.

si p termina en...	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p^2 termina en	1	4	9	6	5	6	9	4	1
¿es par p^2?	no	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no

de modo que *p* ha de terminar en 2, 4, 6 o 8. Por tanto concluímos que

$$\boxed{p \text{ es par}}$$

4.- Si *p* es par, será el doble de otro número (por ejemplo, 126 es par y es el doble 63, o sea 126=2*63). Así
p* =2*k siendo k algún número entero.

5.- Si sustituímos este valor de *p* en la ecuación 5 tendremos

$2q^2 = (2k)^2 \quad (\text{ec.}6)$

$2q^2 = 4k^2 \quad (\text{ec.}7)$

$q^2 = 2k^2 \quad (\text{ec.}8)$

6.-Si observamos la ecuación 8: veremos que la situación es idéntica a la que teníamos en la ecuación 5 comentada en el punto 2. Razonando de modo idéntico concluimos que q^2 es par y que por tanto: .

$$\boxed{q \text{ es par}}$$

7.- Observa que hemos terminado concluyendo que *p* y *q* tienen un divisor común, el 2 ya que ambos son pares.

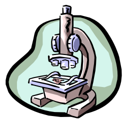
<u>Conclusión</u>: SI SUPONEMOS QUE $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ CON *p* Y *q* <u>SIN DIVISORES COMUNES</u>, HEMOS CONCLUÍDO QUE *p* Y *q* TIENEN UN DIVISOR COMÚN, que es el 2.

¿No es esto una contradicción? En efecto, las sentencias "*p y q no tienen divisores comunes*" y *"p y q tienen al 2 como común divisor*" no pueden ser ciertas a la vez. Son contradictorias.
Y en ningún sistema lógico pueden existir contradicciones, de modo que no pueden ser verdaderas a la vez las dos frases anteriores.

¿Cómo surge la contradicción? Procede de la primera hipótesis, esto es, que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, de lo que hemos deducido la existencia de algo que es verdadero y falso a la vez.
Así es que hemos de AFIRMAR QUE **"$\sqrt{2}$ NO ES RACIONAL".**

Por tanto, admitiremos que $\sqrt{2}$ **<u>ADMITE UNA FORMA DE EXPRESIÓN DECIMAL CON INFINITAS CIFRAS DECIMALES QUE NO SE REPITEN PERIODICAMENTE</u>** y que por tanto nunca lo conoceremos con completa exactitud.

INVESTIGA TÚ MISMO



PODEMOS CONSTRUIR NÚMEROS DECIMALES QUE NO SON NÚMEROS RACIONALES

Como ya sabes, todos los números racionales admiten una expresión decimal. Esta expresión puede ser <u>finita</u> si el número es un decimal exacto (como 2,34 ó 123,8883) o puede ser <u>infinita</u> si el número es periódico (como 2,3434343434... ó 123, 88833333333...). En cualquier caso dichos números decimales corresponden a fracciones y una fracción sólo puede ser representada por uno de dichos tipos de números decimales.

Considera el número decimal siguiente $a = 25,1\ 01\ 001\ 0001...$ y responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles crees que son las cifras decimales que siguen?
   ....
2. ¿Este número decimal es exacto?
   ....
3. ¿Tiene este número decimal un periodo que repetido sucesivamente nos proporcione su serie de cifras decimales?
   ....
4. ¿Es este número decimal periódico?
   ....
5. ¿Podemos construir este número decimal?
   ....
6. Si quisiéramos encontrar la cifra decimal que ocupa el lugar 46 ¿Qué tendríamos que hacer?
   ....
7. ¿Dirías que "tiene sentido" este número decimal?
   ....
8. ¿Crees que es un número racional?
   ....
9. ¿Por qué?
   ....

Completa el siguiente enunciado:

El número decimal *25, 1 01 001 0001...* NO es un número racional porque no es un decimal .... ni tampoco es un decimal ....

LOS NÚMEROS IRRACIONALES

A la vista de los tres resultados previos, podemos concluir que:

1. Hay números relacionados con operaciones y con segmentos que no aceptan una forma racional.
2. Podemos encontrar números decimales que no son racionales
3. Los números racionales no son suficientes para medir o cuantificar el universo.

Así que necesitaremos profundizar en el conocimiento de estos nuevos números.
Para empezar respondamos a unas cuantas preguntas sencillas:

¿CÓMO LES LLAMAMOS?

Puesto que estos números no son RACIONALES, les llamaremos IRRACIONALES. Si unimos los conjuntos de los NÚMEROS RACIONALES y los NÚMEROS IRRACIONALES, obtenemos un nuevo conjunto que llamaremos **EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES**.

¿CUÁNTOS SON?

A la vista de lo anterior podemos decir que por lo menos son tres: $\sqrt{2}$, el número x tal que $6^x = 100$ y el decimal *25, 1 01 001 0001 00001...* .
Pero hay muchos más:

- $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8},$ ¡pero no todas las raíces!
- algunos números muy importantes y con nombres propios: Π (pi), Φ (fi), e
- los que resultan de operaciones entre ellos

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$2*\Pi$

e^2

$1+\sqrt{5}$

$\sqrt{2}*\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

¡pero no todos los que resultan de operaciones con ellos son irracionales! En realidad:

LOS NÚMEROS IRRACIONALES SON INFINITOS

¿QUÉ LES CARACTERIZA?

Puesto que nos hemos convencido de que ni $\sqrt{2}$, ni "el número x tal que $6^x = 100$", pueden expresarse por una fracción tenemos que admitir que su característica tiene que ser que **ADMITEN UNA REPRESENTACIÓN CON UNA EXPRESIÓN DECIMAL CON INFINITAS CIFRAS DECIMALES SIN PERIODO ALGUNO**.

¿CUÁL ES SU SIGNIFICADO?

Analicemos un poco el sentido de conocer números que dado que tienen infinitas cifras decimales que no sabemos cuales son realmente. Hay una diferencia fundamental entre lo finito y lo infinito. Lo vemos con un ejemplo.
El genoma humano (conjunto de genes de nuestras células) se ha estado estudiando por científicos de todo el mundo desde hace unos años. Se trataba de conocer el 100% de la secuencia de las cadenas de ADN de todos los cromosomas de nuestras células. Era un trabajo faraónico por el número de secuencias que han de diferenciarse, contarse, agruparse etc. y que necesitó de varios años para llegar a su fin. Pero se terminó, el

trabajo a realizar era finito. Hoy disponemos de la descripción completa del genoma humano.
Si las secuencias de ADN fueran una cantidad infinita, podríamos invertir cientos de años en conocer sólo una pequeñísima parte de nuestro genoma. Si así fuera, es cierto que ello sería mejor que no conocer nada en absoluto del genoma, pero nunca podríamos decir que "conocemos el genoma del hombre". Podríamos conocer muchos datos sobre su estructura y muchas de sus propiedades. Podríamos utilizar esa información incluso para aventurar otras secuencias de genes. Pero la descripción intrínseca del genoma nunca estaría a nuestra disposición.
Los números irracionales, a diferencia del genoma, sí que vienen representados por una *secuencia infinita* de decimales, y en ese sentido son perfectos desconocidos para nosotros ¡y para todos los matemáticos!. De su *representación* solo conocemos unos pocos dígitos.
Pero por suerte los matemáticos son capaces de encontrar muchas de sus otras *propiedades* y saber cómo se comportan. En este sentido son objetos matemáticos perfectamente utilizables. Por lo tanto son desconocidos en cuanto a su *representación*. Pero la representación no lo es todo.
Sin embargo, la infinitud de su representación nos ha permitido distinguirlos de los números racionales y, como veremos, eso sí que tiene mucha relación con la forma de entender un objeto geométrico elemental: la recta. Y también con el significado de la medida racional o real de objetos simples como son los segmentos.

INVESTIGACIÓN

LA RECTA Y LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Como has visto en los epígrafes anteriores, hay números que no son racionales y que alguno de éstos se corresponde con la longitud de un segmento por ejemplo $\sqrt{2}$, aunque este es sólo un caso de los muchos posibles.
Observa la figura 2. Hemos trazado una recta, la misma que siempre has dibujado de modo contínuo, es decir, sin "agujeros" como es natural. A partir de un segmento de longitud unidad hemos levantado un triángulo rectángulo isósceles.
Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa de dicho triángulo tiene una longitud de $\sqrt{2}$ unidades. Si ahora hacemos centro con el compás en el punto marcado por 0 y tomamos de radio la hipotenusa, su extremo *cae* en un punto *P* de la recta.
Parece lógico que como ese segmento mide $\sqrt{2}$ unidades, el punto P así asignado debería estar *ocupado* por dicho número, $\sqrt{2}$.

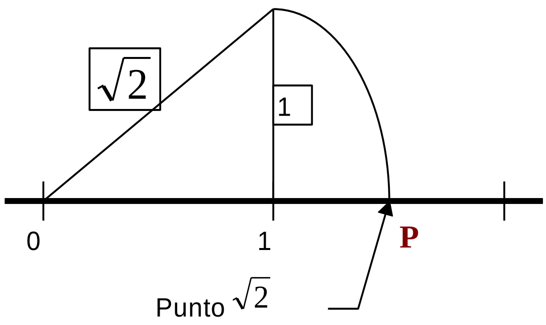


Figura 2

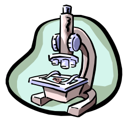
Ahora bien, si este punto P se corresponde con el número $\sqrt{2}$, y ya que sabemos que $\sqrt{2}$ no es una fracción, debemos concluir que **no podía estar *ocupado* por un número racional**, es decir ninguna fracción *da nombre* a ese punto.

Así tenemos que concluir que puesto que como $\sqrt{2}$ no es un número racional, el punto P así marcado en la recta no puede corresponder a ninguno de los números que conocíamos hasta la fecha. De modo que, en la recta racional que has estado dibujando hasta ahora, en ese lugar había un "*agujero*", un *vacío*. El mismo que ahora ocupa el número $\sqrt{2}$.

HAY PUNTOS DE LA RECTA QUE ESTÁN OCUPADOS POR NÚMEROS NO RACIONALES.
SU LUGAR ESTÁ OCUPADO POR NÚMEROS IRRACIONALES

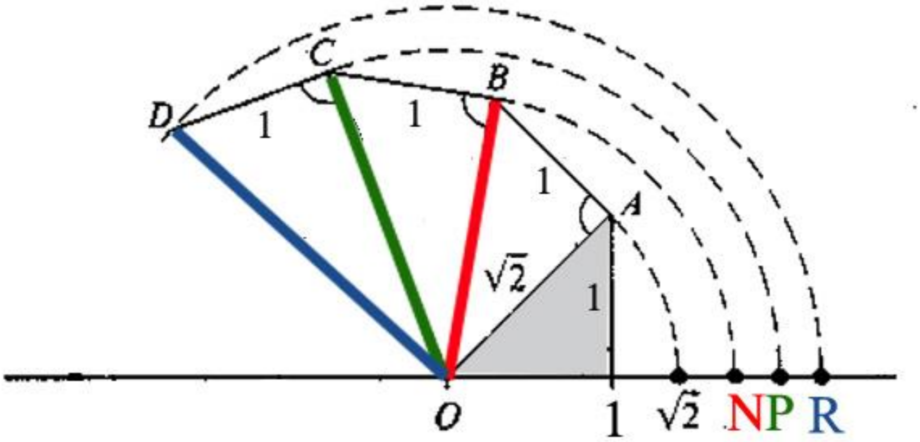
La pregunta oportuna que ahora nos hacemos es:

INVESTIGA TÚ MISMO



¿HABRÁ MÁS AGUJEROS EN LA RECTA RACIONAL, O SERÁ $\sqrt{2}$ EL ÚNICO?

Observa con atención el siguiente diagrama y responde a las siguientes cuestiones basando tus respuestas en lo que has leído en la investigación precedente y utilizando el Teorema de Pitágoras:



1. ¿Cuál es la longitud del segmento OB (rojo) ?
   ....
   ....
   ....

2. El punto N de la recta ¿ Con qué número se debería corresponder?
   ....

3. ¿Cuál es la longitud del segmento OC (verde)?
   ....
   ....
   ....

4. El punto P de la recta ¿ Con qué número se debería corresponder?
   ....

5. ¿Cuál es la longitud del segmento OD (azul) ?
   ....
   ....
   ....

6. El punto R de la recta ¿ Con qué número se debería corresponder?
   ....

7. Sabiendo que los números $\sqrt{3}\ y\ \sqrt{5}$ son irracionales ¿Pueden los puntos N y R representar a números racionales? ¿Por qué?
   ....
   ....
   ....

8. Si la recta sólo tuviera los puntos que corresponden con números racionales ¿Tendría algunos “*agujeros*”? ¿Por qué?
   ....

9. Además de $\sqrt{2}$ ¿Crees que la recta racional tiene más huecos? ¿Qué números los llenan?
   ....

10. Por último ¿Crees que los números irracionales son necesarios para representar adecuadamente la recta geométrica?
   ....

APROXIMACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

El proceso para poder definir un número real, se complica cuando tratamos de estudiar un irracional. Los números racionales ya los conocemos demasiado bien.
Para determinar a un número irracional serán precisos al menos, dos pasos:

1. Saber que es irracional.

2. Encontrar un mecanismo (algoritmo) para poder *aproximarnos* a él.

Ya que un número irracional está determinado por una sucesión de infinitas cifras decimales y como es imposible poder trabajar con todas ellas, nos conformaremos con una cantidad suficientemente grande de dígitos decimales que nos permitan realizar los cálculos que son necesarios en la física, la ingeniería, la arquitectura y en general para cualquier estudio donde aparezca dicho número con la suficiente exactitud.
Por ejemplo del número Π (Pi) se conocen las primeras 10.000 cifras decimales aunque en la práctica nos servimos de Π=3.141592654..., o de $\sqrt{2}$ podemos calcular tantas como deseemos aunque nos basta con decir que $\sqrt{2}$ = 1.414213562**...**

A continuación te proporcionamos tres formas para poder aproximar el valor de un número real a través de números fraccionarios.

Sucesión creciente de aproximaciones por defecto

Observa la siguiente cadena de desigualdades:

$\mathbf{1 < 2}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{1 < \sqrt{2}}$
$\mathbf{1.4^2 = 1.96}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{1.4 < \sqrt{2}}$
$\mathbf{1.41^2 = 1.9881}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{1.41 < \sqrt{2}}$
$\mathbf{1.414^2 = 1.999396}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{1.414 < \sqrt{2}}$ **[...]**

De este modo construímos la sucesión 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... de números racionales en la que cada número es mayor que el anterior y todos ellos menores que $\sqrt{2}$**.** Parece lógico que digamos que si un conjunto de números *crece constantemente pero no sobrepasa a uno dado*, ese conjunto *tiende*, *se acerca* o *tiene por límite* a ese número, en nuestro caso $\sqrt{2}$. Por ello decimos que

$$\boxed{\sqrt{2} = (\mathbf{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...})}$$

y esta sucesión de números racionales define a $\sqrt{2}$ POR **DEFECTO**.

Sucesión decreciente de aproximaciones por exceso

Observa esta otra cadena de desigualdades:

$\mathbf{2^2 > 2}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{\sqrt{2} < 2}$
$\mathbf{1.5^2 = 2.25 > 2}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{\sqrt{2} < 1.5}$
$\mathbf{1.42^2 = 2.0164 > 2}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{\sqrt{2} < 1.42}$
$\mathbf{1.415^2 = 2.002225 > 2}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{\sqrt{2} < 1.415}$

Así construímos la sucesión 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143... de números racionales en la que cada número es menor que el anterior y todos ellos mayores que $\sqrt{2}$**.** Parece lógico que digamos, que si un conjunto de números *decrece constantemente pero no alcanza a uno dado*, que ese conjunto *tiende*, *se acerca* o *tiene por límite* a ese número, en nuestro caso $\sqrt{2}$. Por ello decimos que

$$\boxed{\sqrt{2} = (\mathbf{2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143..., ...})}$$

y esta sucesión números racionales define a $\sqrt{2}$ POR **EXCESO**.

Si ahora combinamos las dos sucesiones anteriores podremos afirmar que:

$$\begin{array}{rcr}
\mathbf{1} & < \sqrt{2} < & \mathbf{2} \\
\mathbf{1.4} & < \sqrt{2} < & \mathbf{1.5} \\
\mathbf{1.41} & < \sqrt{2} < & \mathbf{1.42} \\
\mathbf{1.414} & < \sqrt{2} < & \mathbf{1.415}\quad \mathbf{[...]}
\end{array}$$

y por tanto si consideramos los segmentos de extremos **[1,2], [1.4,1.5], [1.41,1.42], [1.414,1.415]** y así sucesivamente podremos observar que cada uno está dentro del siguiente y que su longitud mide 10 veces menos que la del anterior, ¿no parece lógico que esa colección de segmentos tengan un **UNICO** punto en común? En efecto así es, y ese punto común, es el que representa al número $\sqrt{2}$. Así diremos que

$$\boxed{\sqrt{2} = \{[1,2] \supset [1.4,1.5] \supset [1.41,1.42] \supset [1.414,1.415] \supset \ldots\}}$$

ALGUNAS PREGUNTAS CON RESPUESTA

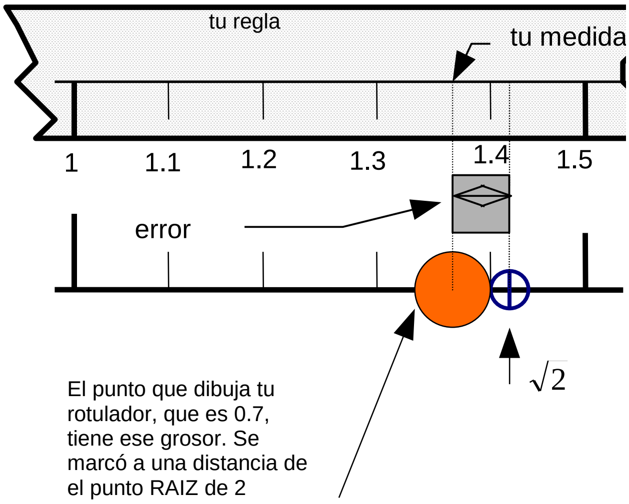
A continuación reseñamos algunas preguntas que seguro que te estás haciendo.
Además te proporcionamos sus respuestas.

1. Todo esto está muy bien pero, hasta la fecha he utilizado la calculadora para calcular $\sqrt{2}$ y nunca me ha dicho nada del tipo "E*ste número no lo puedo calcular, tiene infinitas cifras decimales"* de modo que he resuelto todas las operaciones en las que ha aparecido, ¿por qué, si esos números irracionales me dicen que son incognoscibles (no se pueden conocer) por tener infinitas cifras decimales?

   Como todo instrumento de medida o de cálculo, está materializado de modo que la calculadora utiliza estos números <u>dando **uno** de los elementos de una sucesión que define al número</u> $\sqrt{2}$. En función de la precisión de la calculadora el elemento de la sucesión que ofrece como respuesta será mejor o peor, aportando al cálculo un error menor o mayor.

2. El segmento hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 cm. lo puedo medir con mi regla... pero ¿si he oído decir que es un segmento inconmensurable, es decir, que no se puede medir?

   De modo similar a como sucede con la calculadora, medir un segmento consiste en la utilización de un instrumento que estará basado en una unidad de medida, en una escala. Tu medida obtenida con la regla es sólo una aproximación al valor $\sqrt{2}$. Analiza el dibujo siguiente y entenderás lo que decimos.



Según el diagrama anterior ¿Cuál sería el valor de tu medición para ese segmento que sabemos que mide $\sqrt{2}$? A la vista de la instrumentación sería entre 1.3 y 1.4 en función de la precisión de la regla (sólo hay marcas cada 0.1). ¿Crees que tu regla mide realmente el segmento $\sqrt{2}$?
La idea es que no serviría ni tu regla ni ninguna para medir el segmento de longitud $\sqrt{2}$, sencillamente no existe.
Lo importante es que la medida obtenida tenga la precisión adecuada para el cálculo en el que esté involucrada: no es lo mismo utilizar $\sqrt{2}$ para calcular cuántos metros de cable necesitamos para una pared de una habitación triangular con catetos de longitud 10 metros, que para determinar la perdida de energía de un pulso en la transmisión de un mensaje en el interior de los conductores de un ordenador.
En el primer caso, si los catetos miden 10 metros, la hipotenusa mide $\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=\sqrt{2}\sqrt{100}=10\sqrt{2}$ metros y de este modo:

Valor de $\sqrt{2}$	Metros de cable necesario	Observación
1.4	14 metros	Nos faltaría un trozo enorme de 10 cm.
1.41	14,1= 14 metros + 1 decímetro	<u>Este valor sería suficiente.</u>
1.414	1.414=14 + 11 centímetros	Demasiado preciso. 1 cm. no se nota en 14 metros

En cambio en el segundo caso el orden de las magnitudes físicas que se involucran obliga a calcular con muchos más decimales. Los cálculos que realiza un ordenador personal sin grandes prestaciones están en torno a las 16 cifras decimales exactas. Con los coprocesadores matemáticos la precisión puede exigirse en decenas de dígitos de precisión.

3. Pero entonces, ¿Qué hace distintos a los números irracionales de los racionales, si al final los utilizamos como si fueran todos racionales, y no nos dan ningún problema?

Aunque en el uso real y práctico de un objeto matemático no se contemplen todas sus propiedades, ya sea por impedimentos técnicos o simplemente porque no es necesario, no quiere decir que dichos objetos (conceptos) no se puedan estudiar, y sobre todo distinguibles de otros. Así la diferencia intrínseca de los irracionales con los racionales debe, cuando menos, llevarnos a entender el universo como algo más complejo de lo que podamos imaginar, repleto de entidades incognoscibles por definición, pero, y esto es lo más importante, cognoscible al nivel necesario para su utilización en el mundo real, no el de las ideas, sino el de la técnica, la medicina y las ciencias y humanidades.

Tampoco hay que olvidar que siendo objetos distintos (los racionales y los irracionales) el estudio de uno puede aportar información sobre el otro. Los números irracionales aparecieron como un descubrimiento para los geómetras, ¿crees que no merece la pena analizar sus propiedades, y conocerlos? Si lo piensas bien el progreso humano tienes la respuesta a esta pregunta.

ALGUNOS NÚMEROS REALES IMPORTANTES

Φ La Proporción Áurea

Representa la forma más armónica de dividir un todo en dos partes desiguales, de modo que éstas partes asimétricas conserven la misma proporción que el todo y la mayor de ellas.

Aparece como paradigma de la proporción reflejado en templos y edificios, composición de pinturas, en modelos artísticos, modos de crecimiento natural o simplemente en figuras geométricas que conocemos .

Se relaciona con el número irracional $\sqrt{5}$ (por ello Φ es también irracional).

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398875$$

Analicemos por qué este valor:

Sea AB el segmento a dividir. Sea C el punto tal que AB, AC y BC estén en proporción Áurea. Es decir $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC} = \Phi$, es decir el segmento grande es CB y el pequeño AC. Además AB=AC+CB. (Recuerda que Φ es el valor del ratio que permanece constante en la proporción).

$$\frac{AC+CB}{CB} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{AC}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{AC}{CB} + 1 = \frac{CB}{AC};\ si\ hacemos\ \frac{AC}{CB} = x\ tendremos$$

$$x + 1 = \frac{1}{x}$$

$$x^2 + x + 1 = 0;\ solucionando$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

¿y qué es x ? La razón

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\text{lado mayor}}{\text{lado menor}} = \text{valor de la RAZÓN ÁUREA (por definición)}.$$

Así, tres magnitudes están en proporción áurea si sus razones tienen de valor Φ ó 1.6180...

De todas las proporciones la más simple, que se corresponde con la división asimétrica más simple de un todo, fue denominada por los griegos como "*la sección"* (por excelencia). Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci la denominó "La Divina proporción". En matemáticas se llama "*La sección áurea*" o con la letra griega mayúscula Φ (léase fi) en honor a Fidias,.

Π La medida de la longitud de la circunferencia

Es difícil imaginar alguna parcela del conocimiento humano donde no aparezca este número. Probablemente sea el número a cuyo cálculo se han dedicado los matemáticos más inteligentes a lo largo de la Historia. Matemáticos y estudiosos de todos los tiempos se han esforzado por encontrar alguna relación entre sus cifras decimales, o por hallar un algoritmo que calcule su valor con mayor rapidez (es decir que obtenga más cifras decimales exactas en menor número de pasos).

El porqué de todo este interés es muy simple. Su existencia está vinculada a la de una de las figuras geométricas más básicas por su importancia y su simplicidad: la circunferencia. Probablemente sin circunferencias nunca hubiéramos reparado en la existencia de Π.

Π representa la relación entre la longitud de toda la circunferencia y el diámetro que la define. Es decir ¿Cuántas veces cabe un segmento de longitud diámetro en la circunferencia con él trazada (se entiende ésta una vez cortada y estirada!!)? Exactamente Π veces.

O de otro modo: si dispusiéramos de un metro marcado a intervalos de un diámetro dado, y con él intentáramos medir la circunferencia que define, dónde terminará la circunferencia (estirada claro!!!) deberíamos marcar el valor ; es decir la circunferencia mide Π diámetros (por otro lado una cantidad inconmensurable, ya que es irracional).

Al excelente matemático Arquímedes que vivió en Siracusa en el sur de Italia, toda su vida le debemos un método riguroso de cálculo del valor de Π. Valor que tiene una aproximación increíble si tenemos en cuenta los recursos con los que contaba. Hoy se conocen miles de cifras de este número, aunque nos basta con saber que

Π= 3.141592654...

e El número de las ciencias

El número **e** –de Euler, el gran matemático suizo- aparece en multitud de situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, este número aparece en el los estudios sobre cualquier cable de peso aceptable soportado por dos postes, como los de la alta tensión, o en la respuesta a preguntas sobre la proporción de hombres con talla 42 en España o al análisis de la corriente alterna.

Aparece como el número al que tienden los valores de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando se sustituye n por los sucesivos números naturales (1,2,3,...). Esta serie de nuevos números no se dispara arbitrariamente sino que se acercan a un valor que es **e=2,718281828459050...**.

La tabla siguiente te da la *pista* de como se acerca la expresión al valor de e.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2	100	2,704813829	1000	2,716923932
2	2,25	200	2,711517123	2000	2,717602569
3	2,37037037	300	2,713765158	3000	2,71782892
4	2,44140625	400	2,714891744	4000	2,717942121
5	2,48832	500	2,715568521	5000	2,71801005
6	2,521626372	600	2,716020049	6000	2,71805534
7	2,546499697	700	2,716342738	7000	2,718087691
8	2,565784514	800	2,716584847	8000	2,718111955
9	2,581174792	900	2,716773208	9000	2,718130828
10	2,59374246	1000	2,716923932	10000	2,718145927

PARA AMPLIAR

Te proponemos dos propiedades muy importantes de los números reales: una que habla de la densidad con la que estén

LA REPRESENTACIÓN DE LA RECTA

Hasta el momento, la recta que dibujabas para representar los números racionales (fracciones) era una representación de la **recta continua geométrica**. No había diferencia entre una y otra. Cada punto tiene *asignado* un número y cada número se *corresponde* con un punto.
Era evidentemente una recta <u>continua</u> en el sentido de que no tenía huecos (la recta geométrica no los tiene).
Sin embargo por lo visto hasta ahora deberíamos entender que <u>este modelo no es el adecuado para representar la recta continua geométrica</u>: <u>HAY PUNTOS EN LA RECTA CONTINUA QUE NO SE CORRESPONDEN CON NINGÚN NÚMERO RACIONAL</u>.
Entonces ¿los números racionales no son un modelo para la recta?
No exactamente.
Los números racionales tienen una propiedad que comparten con los números reales, que les hace ser *buenos candidatos* a representantes de la recta: su densidad. Decimos que los racionales y los reales son DENSOS.

LOS NÚMEROS RACIONALES SON DENSOS

Veamos el significado de la **densidad** desde el punto de vista del sucesor a un número dado.
Si pensamos un poco en el comportamiento de las fracciones observaremos que no podemos encontrar el número siguiente a uno dado: ¿Cuál es el número que sigue a $\frac{1}{5}$? ¿Es $\frac{1}{5}+1$? ¿Es $\frac{1}{5}+\frac{1}{100}$? ¿O es $\frac{1}{5}+\frac{1}{750}$?

Como ves siempre es posible agregar un número más pequeño a $\frac{1}{5}$ siéndonos imposible encontrar su sucesor.

Veámoslo con más detalle. Si suponemos que $\frac{3}{8}$ es el sucesor de $\frac{1}{5}$ no habrá ningún racional entre ellos.

Pero entre los números $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{8}$ siempre podemos encontrar otro número racional: $\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{8}}{2}=\frac{23}{80}$. que estará entre ellos.

De este modo no podemos decir que seamos capaces de encontrar el sucesor de $\frac{1}{5}$.

Desde luego $\frac{3}{8}$ no lo es, ya que $\frac{23}{80}$ es mejor candidato (está más cerca de $\frac{1}{5}$).

Pero si se aplica el mismo razonamiento a $\frac{23}{80}$ llegaremos a la misma conclusión de nuevo.

En efecto, si calculamos la media de $\frac{1}{5}$ *y* $\frac{23}{80}$ encontraremos un número racional que estará entre ellos: MEDIA= $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{23}{80}}{2}=\frac{195}{800}=\frac{39}{160}$ con lo que el candidato a sucesor sería ahora $\frac{39}{160}$. Y así sucesivamente.

Como puedes ver NO ES POSIBLE ENCONTAR EL SUCESOR A UN NÚMERO RACIONAL DADO. ¿VES QUE LA DENSIDAD QUE TIENE ESTE CONJUNTO ES TAL QUE ESTÁN TAN *JUNTOS* QUE NO SE PUEDE ENCONTAR AL SIGUIENTE?

Este hecho hace que los racionales sirviesen durante mucho tiempo como un modelo de recta geométrica. Especialmente en la época griega.

LA NUMERABILIDAD

A pesar de su densidad los racionales fallan en su "cantidad" para *llenar* una recta.

Es decir, los agujeros irracionales de la recta racional no son una casualidad, pues en la RECTA RACIONAL HAY MÁS AGUJEROS QUE NÚMEROS RACIONALES, ya que se puede probar que:

1. entre dos número irracionales es posible encontrar infinitos número irracionales
2. entre dos números racionales es posible encontrar un irracional
3. existen más números irracionales que racionales

Así tendrás que convencerte de que **ENTRE DOS NÚMEROS RACIONALES EXISTEN INFINITOS NÚMEROS IRRACIONALES**. ¡a pesar de la densidad de los racionales, hay sitio para meter a los irracionales!

Así, la recta racional, aparentemente *continua*, estaba densamente *vacía* (con agujeros), que se *llenan* con los irracionales.

Si consideramos LA **RECTA REAL**, ES DECIR LA FORMADA POR **NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES**, TENEMOS UN MODELO AUTÉNTICO DE LA RECTA CONTINUA GEOMÉTRICA.

Si estudiamos la *numerosidad* de los racionales frente a los reales, hallaremos un resultado asombroso que quizá sea la clave para interpretar a los números reales como representación del continuo de aquí en adelante.

A pesar de que la densidad es una propiedad común a los números reales y a los racionales, el número de elementos que tiene cada conjunto de éstos es notablemente distinto y constituye uno de los resultados más interesantes de principios de siglo XX: lo infinito es cuantificable y diferenciable, o dicho de otro modo, hay cantidades infinitas más grandes que otras.

Volvamos a la imagen de la recta. Como quedó claro anteriormente, si bien no es posible encontrar el sucesor de un número racional (*el punto de la recta racional que le toca al lado*) si que es posible ponerlos a todos en fila y numerarlos: primero, segundo, tercero etc. Un modo para hacerlo lo representa el siguiente diagrama:

	...	...	...	...	...	...	
...	3/-3	3/-2	3/-1	3/1	3/2	3/3	...
...	2/-3	2/-2	2/-1	2/1	2/2	2/3	...
...	1/-3	1/-2	1/-1	1/1	1/2	1/3	...
...	0/-3	0/-2	0/-1	0/1	0/2	0/3	...
...	-1/-3	-1/-2	-1/-1	-1/1	-1/2	-1/3	
...	-2/-3	-2/-2	-2/-1	-2/1	-2/2	-2/3	
	...	...	...	...	...	...	

en el que se han escrito TODOS los racionales en una cuadrícula que se puede recorrer sucesivamente.
Con este diagrama diríamos :

1º-> 0/1,
2º-> 1/1,
3º-> 1/-1,
4º-> 0/-1

... (sucesión de la que solo tendríamos que eliminar los repetidos) .
En este sentido podemos decir EXISTEN TANTOS NÚMEROS RACIONALES COMO NÚMEROS NATURALES (de contar).
Y de este modo podríamos interpretar que los números racionales serían un modelo para la recta de puntos discretos, formada por la agregación y ordenación (uno tras otro) de los puntos que la forman.
Se dice que esta es una recta NUMERABLE (discreta).
EN ELLA CADA PUNTO SE CORRESPONDE CON UN NÚMERO RACIONAL como has venido haciendo hasta la fecha, pero ahora sabes que existen segmentos no medibles en dicha recta con números racionales (el de medida $\sqrt{2}$, seguro que no está).
Este era el modelo de recta de los griegos, con la que nació la geometría Euclídea. Una geometría donde todo era medible por racionales. (sólo se conocían *oficialmente* los números racionales).
En cambio los números reales, siendo producto de la agregación de los racionales y los agujeros irracionales, no sólo no se pueden colocar correlativamente, sino que son **más** numerosos que todos los números de contar, a pesar de que tanto unos (los NATURALES) como los otros (REALES) son infinitos.

Num. elementos de N < Número de elementos de R **Infinito para contar < Infinito continuo**

Esta notable diferencia entre los cardinales de estos conjuntos, configuran a los números reales como más densos que los racionales y candidatos perfectos para la representación de la recta continua.
A partir de ahora, **LA REPRESENTACIÓN DE LA RECTA GEOMÉTRICA CONTINUA SERÁ EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.**

__________________________oooOOOOOoooo______________________

Felipe E. Ramírez Martínez
felipe.ramirez@uam.es