El cambio

Por qué las funciones funcionan

Felipe E. Ramírez PhD.

Sólo lo que cambia puede ser observado. La inmutabilidad no provoca nada. Si no hay cambio, no hay nada que explicar.

Podríamos pensar que por mucho tiempo que pase una persona frente a un poste de hierro que soporta unos cables, no verá que nada cambie en el poste. Resulta inmutable. Pero eso es falso: depende de lo que deseemos observar. Si mi interés está en su cambio de posición diré que no hay cambio. Pero si observo su cambio de posición respecto del sol naciente ya puedo observar un cambio y medir "algo" que me permita explicar ese cambio. ¿A qué distancia angular sale el sol cada mañana respecto del poste? ¿Qué tamaño tiene su sombra? ¿La sombra señala siempre la misma dirección?

El Universo es cambio. Siempre hay *algo* que cambia y que es susceptible de ser cuantificado, medido. Cuando se produce un fenómeno observamos "algo" de ese fenómeno que es el objeto de nuestra observación.

Los cambios se estudian de modo **selectivo** tomando en consideración unas propiedades de los entes involucrados en el fenómeno y no otras. Por ejemplo si dispones de un globo, lo llenas de helio y lo cierras, puedes estudiar el volumen que adquiere el globo cuando lo comprimes. Entonces encontrarás una relación que se llama Ley de Gay-Lussac. Pero también puedes comparar su color con la presión a la que sometes el globo. No encontrarás ninguna relación.

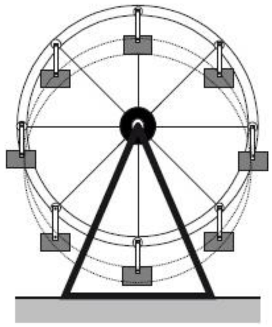
De entre los cambios, los hay de varios tipos según su **regularidad**. Los hay que no están sujetos a ninguna norma aparente como puede ser el **cambio de humor** de Alfredo cuando llega al instituto. O los minutos que un conductor de autobús dedica al día a pensar en su equipo de futbol.

Los cambios también pueden estar sujetos a la **obediencia a leyes** que los científicos se encargan de desenmascarar. Estos son los cambios que más interesan. Precisamente el trabajo de buena parte de los científicos es justamente ese, determinar que leyes obedecen los fenómenos que observamos. Si hallamos el modo en el que trascurren estaremos cerca de conocer sus causas (o viceversa).

Otros cambios pueden explicarse por razones **estadísticas** que si bien, no obedecen al pie de la letra leyes precisas, están controlados por leyes generales que gobiernan el modo en el que "habitualmente" se producen los fenómenos. Cuando un meteorólogo predice el tiempo de mañana, no estudia una "*Ley de la lluvia*" que le dice cuándo va a llover o no. El meteorólogo, entre otras cosas, se rige por la creencia de que la regularidad estadística hallada antes, debe ser tomada como probable en el presente. Pero con un error intrínseco en la predicción debida al carácter multifactorial del fenómeno. Los fenómenos en los que el cambio sucede obedeciendo una determinada ley son los que vamos a estudiar. En matemáticas se denominan **FUNCIONES** a esas **LEYES** que gobiernan como se producen y trascurren los fenómenos.

Algunos ejemplos

1 La Noria



Imagina que estás montado en una noria de un parque de atracciones. Cuando la noria está en marcha tu movimiento visto desde el suelo describe un círculo. El cambio en el fenómeno que observamos es "el cambio de posición en el espacio de –pongamos por caso- la punta de tu nariz". En cada instante tu nariz se halla en un punto distinto. Si pudiéramos fotografiar cada posición de la punta de tu nariz veríamos justamente que describe una circunferencia.

Si queremos estudiar este fenómeno, el **tiempo** es una magnitud que toma cualquier valor desde que la noria se pone en marcha ($t_0 = 0$) hasta que da una vuelta ($t_1 = t$).

La **posición** de la punta de tu nariz en el espacio no es aleatoria sino que viene dada por el tiempo que ha transcurrido desde que empezó a moverse la noria. La posición de tu nariz es la **magnitud dependiente** y el tiempo la **magnitud independiente**.

La ley que *gobierna* la posición de la punta de una nariz es un polinomio en x e y (aunque también tiene una expresión en la que aparecen el seno y el coseno de un ángulo).

Fichero Geogebra: noria.ggb

2

Pero para el mismo fenómeno de la noria podemos estudiar otras magnitudes que también cambian. Por ejemplo, podemos estar interesados en estudiar **cómo cambia la altura** sobre el suelo a la que se encuentra la punta de tu nariz según va cambiando el tiempo. En este caso **la altura** a la que está tu nariz es la **magnitud dependiente** y el **tiempo** es de nuevo la **magnitud independiente**. Estas dos magnitudes también están ligadas por una ley, pero es diferente de la ley que gobierna la posición de tu nariz y el tiempo.

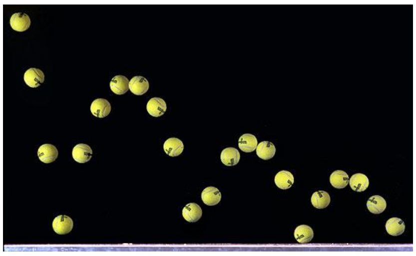
En realidad, es una ley sinusoidal y tiene que ver con el **seno** de un ángulo.

¿Por qué el **tiempo** es una variable independiente de la que dependen otros muchos fenómenos?

3 Los proyectiles

Supongamos ahora que queremos estudiar cómo se mueve una bala de cañón que ha sido disparada. Si pudiéramos disponer de una imagen gráfica que me señalara –como en el caso de la noria- en qué posición estará la bala trascurrido un cierto tiempo desde que fue disparada, podríamos decir que conocemos como se mueve la bala, su movimiento. Este fue un problema que interesó notablemente a los filósofos de la naturaleza desde que se inventó la flecha y mucho más desde que existe la artillería. Corregir el disparo para conseguir dar en el blanco depende de saber cómo se mueve la bala disparada. Galileo Galilei en el siglo XVII fue el primero en proponer una solución acertada al mismo. Se pensaba que la trayectoria del proyectil era circular o cuasi-circular. Error. La bala en su movimiento *trazaba* una parábola.

Es la misma curva que dibuja un saltador de pértiga. (bueno, no él sino su centro de masas que está más o menos por el ombligo). O la misma parábola que describe una pelota de tenis cuando la hacemos botar.



En este caso, como en la noria, queremos ver cómo cambia la posición de la bala conforme pasa el tiempo. Para este fenómeno resulta interesante estudiar la **altura a la que se encuentra la bala** en cada **instante** desde que fue disparada. Así la **altura del proyectil** es la magnitud dependiente y el **tiempo** la magnitud independiente.

La ley que gobierna el fenómeno es un polinomio de grado 2.

4 EL VOLUMEN DE LA ESFERA

No es necesario salir del ámbito de las matemáticas para encontrar magnitudes que estén relacionadas.

Por ejemplo, como bien sabes, la fórmula para calcular el volumen de una esfera es $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

De la fórmula se deduce que el tamaño de una esfera depende del cubo de su radio. Es decir el **volumen de la esfera** (magnitud 2) **depende** de la **longitud del radio** de la esfera (magnitud 1). Estas magnitudes están ligadas de nuevo por una **ley** que relaciona el valor de una magnitud (el volumen) con el de la otra (el radio).

De hecho todas las fórmulas que conoces de la geometría elemental para el cálculo de áreas y volúmenes son la expresión de una **función**.

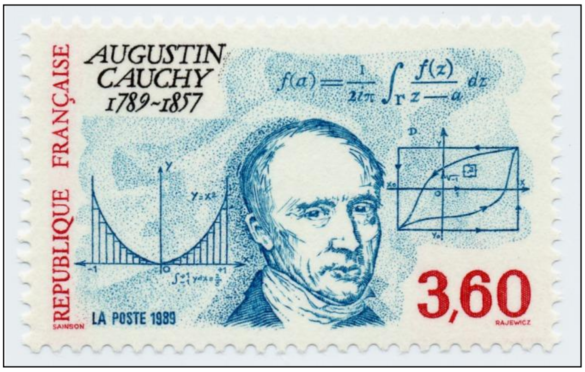
5 EL CASO DEL CRECIMIENTO DISCRETO DE LAS BACTERIAS

Como bien sabes las bacterias se reproducen por bipartición, es decir cuando la bacteria llega a un estado de madurez determinado –principalmente debido a su tamaño- se divide en dos desapareciendo ella y creando dos nuevas bacterias. Las células se dividen del mismo modo. Supongamos que disponemos de un cultivo de bacterias en una capsula de Petri con suficiente sustrato mineral para que puedan crecer todas al mismo ritmo de tal forma que cada **15 minutos** se produce una maduración de todas las bacterias de un cultivo. Podemos preguntarnos si el número de bacterias que hay tras un determinado tiempo sigue algún patrón o ley. En este caso la magnitud independiente es el tiempo que ha transcurrido y la magnitud dependiente el número de bacterias que hay en la cápsula.

Reflexiona: ¿Tiene sentido que la variable tiempo tome cualquier valor? ¿Por qué? ¿Se te ocurre otra variable independiente que no sea exactamente el tiempo?

El enfoque matemático

Todos los fenómenos anteriores no fueron estudiados del mismo modo a lo largo de la Historia. Podemos decir que Nicolás de Oresme, Galileo Galilei, Isaac Newton, Gottfried Leibniz o Johann Bernoulli desarrollaron procedimientos para estudiar estas **relaciones entre magnitudes** con un método universal. Si quieres encontrar algo *parecido* a lo que estudias hoy tienes que ir a la época de Leonard Euler (s XVIII) y sobre todo a la de August Cauchy (s XVIII-XIX) quienes fundaron tal y como la estudias tu hoy el ANÁLISIS DE FUNCIONES[1]. Una metodología clara que permite analizar todos los fenómenos anteriormente citados y miles más.



LOS MATEMÁTICOS SE ENCARGAN DE LIMPIAR LA BASURA.

Como suele ser habitual, las matemáticas **prescinden del contexto** de los fenómenos para proporcionar una teoría general que se aplica a múltiples disciplinas.

De la observación de los ejemplos anteriores los matemáticos nos quedamos con lo **relevante** y **general** prescindiendo de lo superfluo, de la forma buscando lo que tienen en común los distintos fenómenos.

QUÉ HAY DE COMÚN EN LOS EJEMPLOS

En los fenómenos que se estudian en la física, la economía, la biología, la química, la astrofísica o la electrónica intervienen muchas magnitudes. Entre ellas hay unas que cobran nuestro interés en detrimento de otras que no son relevantes para comprender y explicar un determinado fenómeno. En este curso sólo estamos interesados en la relación entre **DOS** magnitudes, que tienen comportamientos distintos. En todos los fenómenos siempre hay una magnitud que **varía libremente**, de la que depende la observación y que determina el valor de la segunda magnitud involucrada en el fenómeno que no toma valores arbitrarios sino que están **determinados** por el de la otra magnitud: la altura de una persona de la noria depende del tiempo que lleve subido a ella, la posición de una bala de cañón depende del tiempo desde que se lanzó etc.

Por tradición a la variable independiente la denominamos ***x*** y a la variable dependiente ***y***.

Como entre ellas hay una vinculación, decimos que $\boxed{y \text{ es una función de } x}$. Esto quiere decir que (generalmente[2]) los valores de ***y*** vienen dados por alguna expresión en la que aparece ***x***. A esta relación es a lo que llamamos **función**, que suele denominarse en matemáticas por las letras ***f, g, h***.

[1] También hay que citar entre otros muchos a Barrow, Bolzano, Gauss, Rolle, Lagrange, D'Alembert, Weierstrass o Riemann.

[2] Veremos que una función puede proporcionarse de varias formas.

EL SIGNIFICADO DE $y = f(x)$.

Si x e y están relacionadas de *alguna forma* decimos que ***y* es función de *x*** y lo escribimos como

$y = f(x)$.

Esta expresión significa que los valores de la magnitud (variable) ***y*** se obtienen por **aplicación** de la **función *f*** a la magnitud (variable) ***x***.

La relación es ***f***, la variable independiente ***x*** y la variable dependiente ***y***, f(x) representa el valor de y que queda asignado a un valor x de la primera magnitud. Veámoslo en un ejemplo.

Si ***x*** mide el tiempo desde que se ha lanzado un proyectil, e ***y*** representa la altura a la que se encuentra en proyectil en el instante ***x***, decimos que $y = f(x)$ que expresa que "*la altura (y) es una función del tiempo (x)* ".

Un físico más interesado por la interpretación física de la variable prefiere llamar a la variable independiente –el tiempo- por la letra ***t*** y la altura ***h*** (aunque como la verticalidad se mide en el eje OY la llaman *y*). Así el físico escribiría $h = f(t)$ manifestando que la altura (***h***) es la variable dependiente que es una función (***f***) del tiempo (***t***) la variable independiente.

Los físicos nos permiten estudiar cómo cambia y al variar x. Por ejemplo nos pueden señalar que en el caso de un disparo con una fuerza y dirección determinada, el proyectil está a una altura $(2x^2 - 3x)$ metros tras x segundos desde que se lanzó.

Decimos entonces que $y = 2x^2 - 3x$ es la función que relaciona la altura del proyectil (y) en función del tiempo (x). Si queremos enfatizar el hecho de que la variable y depende de la x escribimos

$$\boxed{y = f(x) = 2x^2 - 3x}$$

El físico escribiría

$$\boxed{h = f(t) = 2t^2 - 3t}$$

Con esta relación si deseamos averiguar a qué altura estará el proyectil tras 12 segundos de ser disparado, bastará con reemplazar t por 12 y calcular el valor que la **ley le asigna**:

$h = f(12) = 2\cdot 12^2 - 3\cdot 12 = 252$ metros de altura

LAS FUNCIONES Y LA PROGRAMACIÓN DE ORDENADORES

Una función f actúa como una máquina de transformar: tiene como entrada un valor numérico de una magnitud, x y obtiene un valor de salida y.

Los lenguajes de programación de ordenadores funcionan exactamente así. Un programa es casi siempre una función o está formado por multitud de ellas. El programador lo que hace es crear la maquinaria para que cuando se le proporcione un 2 obtenga un 3 (por decir).

Por ejemplo el siguiente código es lo que escribe un programador de C o de Java para calcular el seno de un ángulo.

/* Ejemplo de programa seno.c para calcular el seno de un ángulo por el polinomio de Taylor
Programador: FRM*/

```
main()
{
        int a;
        float seno, angulo;
        angulo = scanf (“Angulo en radianes:= ”)
        seno = angulo -(1/3)*angulo + (1/5)*angulo^3 - (1/7)*angulo^7
        return(seno)
}
```

Esta es la ***maquinaria*** de una función en el contexto de los ordenadores. Pero no deja de ser una función: recibe un número y devuelve el valor de su seno.

REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Indudablemente un gran logro del análisis de funciones se debe a la intromisión de la **geometría analítica** en el tablero de juego del estudio de los fenómenos. Esta intromisión se la debemos a René Descartes un decisivo matemático y no menos relevante filósofo. Su capacidad innovadora creó un paradigma en la filosofía natural al proporcionar el primer sistema del **todo** desde perspectivas científicas y filosóficas (aunque fuera erróneo). Pero nos regaló la geometría de las coordenadas CARTESIANAS que ya conoces, según la cual

Un punto geométrico P es lo mismo que una pareja ordenada de números (x, y).

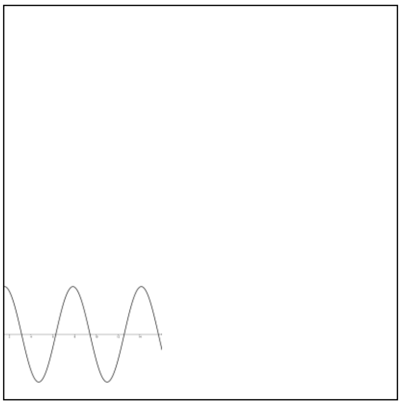
A partir de aquí las funciones encontraron un espacio donde habitar a placer. La geometría de Descartes permitió que el análisis de los fenómenos encontraran un nuevo lugar donde desarrollarse: el plano.

Las reglas del juego fueron simples:

- En el eje OX se disponen los valores posibles de la magnitud independiente (el tiempo, el calor, la masa, el radio)
- En el eje OY se disponen los valores posibles de la magnitud dependiente.
- Para cada valor de la magnitud independiente, pongamos x_0, se obtiene el valor transformado por la función $y_0 = f(x_0)$.

El **punto resultante de coordenadas (x_0, y_0) = ($x_0, f(x_0)$)** es un punto de la **gráfica** de la **función.**

Obtenemos así una representación gráfica del fenómeno que se trata de estudiar. La función se hace así **visible**.



Definición formal de función

Una **función real de variable real** se define con:

- Tabla de valores
    - Datos experimentales
    - Datos estadísticos
- Expresión algebraica
- Función elemental/trascendental
- Regla que no admite una expresión

La función **transforma** números reales, proporcionando otro número real.

Una función *f* es:[3]

- Un conjunto numérico de partida: Conjunto inicial. Dominio (D, Dom).
- Un conjunto numérico de llegada: Conjunto final. Imagen (Img)
- Una *regla* que asocie a cada elemento del conjunto de partida un único valor del conjunto de llegada.

Y se escribe:

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

Dónde x es un elemento que se puede transformar por f y $f(x)$ es el transformado de x por f. También se escribe $y = f(x)$.

La variable x se denomina variable independiente, puesto que toma libremente cualquier valor del conjunto Dom(f). La variable y se denomina variable dependiente porque su valor depende de x y del transformador f.

Se denomina **gráfica** de f o **grafo** de f al conjunto del plano:

$$Grafo(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

La gráfica de una función suele ser una curva. En el eje OX se disponen los valores de la variable independiente x que pertenece a Dom(f) y en el eje OY los trasformados de cada x.

[3] Hay una definición mucho más abstracta de función que no requiere términos con cierta ambigüedad como "transformar" "regla de transformación" etc. Sólo es necesaria la teoría de conjuntos y las relaciones entre elementos y conjuntos y el producto cartesiano.