La función logarítmica

Resumen

Definición

Se llama LOGARITMO DECIMAL de un número ***x*** y se escribe:

$$log_{10}x = y \text{ o } logx = y$$

al exponente ***y*** al que hay que elevar **10** para obtener dicho número, es decir $10^{y} = x$.

Abreviadamente:

$$log_{10}x = y \Leftrightarrow 10^y = x$$

Decimos que ***10*** es la **base** del logaritmo, que ***x*** es el **argumento** y que ***y*** es el **resultado** (o el logaritmo).

Por ejemplo:

log 10 = 1	log 0,1 = -1
log 100 = 2	log 0,01 = -2
log 1000 = 3	log 0,001 = -3
log 10000000 = 7	log 0,00000000001 =-11
log 10^{17} = 17	log 10^{-12} = -12

Podemos definir también

$$log_2x = y \Leftrightarrow 2^y = x$$
$$log_3x = y \Leftrightarrow 3^y = x$$

Y así sucesivamente, aunque en la práctica se utilizan sólo tres logaritmos:

- log_2 : logaritmo en base 2. Utilizado en computación.
- log_{10} : logaritmo en base 10 o decimal. Utilizado en el PH, la escala Richter, o los decibelios.
- $log_e = \ln = Ln$: logaritmo NATURAL o neperiano. Utilizado en matemáticas financieras y matemáticas en general.

  Una vez que hemos introducido el número *e*, éste se utiliza para definir otro logaritmo:
  b = e → **logaritmo NATURAL** o **NEPERIANO**. Se escribe **ln** o **Ln** (abreviatura de **l**ogaritmo **n**eperiano). Aunque te parezca *poco natural*, el inventor de los logaritmos (John Napier) utilizó por primera vez una base muy parecida al número *e*, aunque ese número no había sido denominado todavía. Así escribimos:

$$\ln(x) = \log_e x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Los logaritmos neperianos no pueden calcularse con operaciones algebraicas habituales, salvo en casos muy sencillos. En general para calcular los logaritmos en cualquier base se hace necesario el uso de la calculadora. Cuando Napier publicó los "**logaritmos**" publicó dos textos: uno, con el **significado** de los mismos, sus propiedades y su construcción; y unas **tablas** calculadas por él escocés para poder usar su ***milagrosos*** **logaritmos**, como se denominaron. Hoy disponemos de las calculadoras y las teclas **log** **ln**

Hasta los años 80 del siglo XX las tablas de logaritmos fueron un complemento de todos los libros de texto de matemáticas, incluso se imprimían tablas de logaritmos con 10 y 12 decimales exactos. Sin ellas no se podía calcular el pH de un problema químico.

Práctica

Completa ahora la siguiente tabla utilizando la definición de logaritmo.

log 1 =	$\log_3 27$ =
$\log_2 256$ =	$\log_5 625$ =
$\log_4 64$ =	$\log_0 20$ =
$\log_2 1024$ =	$\log_7 7$ =
$\log_3$ = 243	$\log_9 \left(\frac{1}{81}\right)$ =
$\log_2 \sqrt{2}$ =	$\log_2 \left(\frac{1}{64}\right)$ =

Es importante que sepas que todos los logaritmos son intercambiables, es decir existen **fórmulas** sencillas que relacionan un logaritmo con otro. Por ejemplo, tenemos estas fórmulas de cambio de base:

$$\boxed{log_2 x = \frac{\log x}{\log 2} = 3{,}322 \cdot logx}$$

$$log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 3} = \mathbf{2,095 \cdot \log_{10} x} = \frac{\ln x}{ln3} = \mathbf{0,9101 \cdot lnx}$$

y en general

$$\boxed{log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right) \log_a x}$$

Por eso las calculadoras **solo suelen tener dos teclas de logaritmos**. Los restantes se calculan con las fórmulas anteriores, aunque ya es la tecla del logaritmo universal.

Práctica

Con ayuda de la calculadora y la fórmula de cambio de base calcula los siguientes logaritmos.

log 0,5 =	log (-3) =
$\log_2 30$ =	$\log_2 1$ =
log 1 =	log 0 =
log 2 =	$\log_2 7$ =
$\log_3$ = 123	$\log_5 10$ =

Propiedades fundamentales

Escribiremos por simplicidad las siguientes propiedades para el logaritmo **decimal**. Sirven para cualquier base con los cambios oportunos.

i. $\exists \log\ (A) \Leftrightarrow A > 0$ (no se puede calcular el logaritmo de un número negativo)

ii. No existe $\log_b (0)$.

iii. $\log_b (A) = 0 \Leftrightarrow A = 1$ (el logaritmo sólo vale 0 si el argumento es 1)

iv. $\log_b (b) = 1$ por ejemplo, log (10) = 1, ln (e) = 1

v. $\log_b b^a = a$, por ejemplo, $\log 10^a = a$

vi. $\log\ (A) = \log\ (B) \Leftrightarrow A = B$ **(inyectvidad)**

vii. Signo del logaritmo:
   a. $\log\ (x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
   b. $\log\ (x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

viii. log (A·B) = log A + log B

ix. $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$

x. $\log(x^k) = k\log(x)$

xi. $\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\log(x)$

xii. $x = b^{\log_b(x)}$, en particular $x = 10^{\log(x)}$ o bien, $x = e^{\ln(x)}$ o $x = 7^{\log_7(x)}$

xiii. $\log_b(b^x) = x$, en particular $\log(10^x) = x$

Función logaritmo

Podemos crear una función que haga corresponder a cada número dado su logaritmo **decimal**. De esta forma estaremos definiendo la **función logaritmo decimal de nombre <u>log</u>**.

$$f(x) = logx$$

o más precisamente

$$f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = logx$$

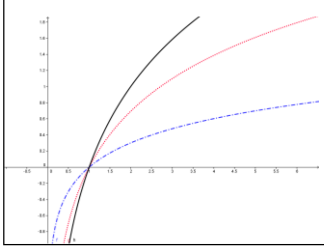
Para representar $f(x) = \log_{10} x$ calculamos una tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	*log x*
0,001	
0,01	
0,1	
1	
2	
3	
10	
20	
30	
100	

Para representar $f(x) = \log_2 x$ completamos una tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	*log₂ x*
1/16	
1/8	
1/4	
1/2	
1	
2	
4	
8	
16	
32	
64	
128	

Y representaremos en unos ejes los puntos obtenidos. Al hacerlo obtendremos las siguientes gráficas:

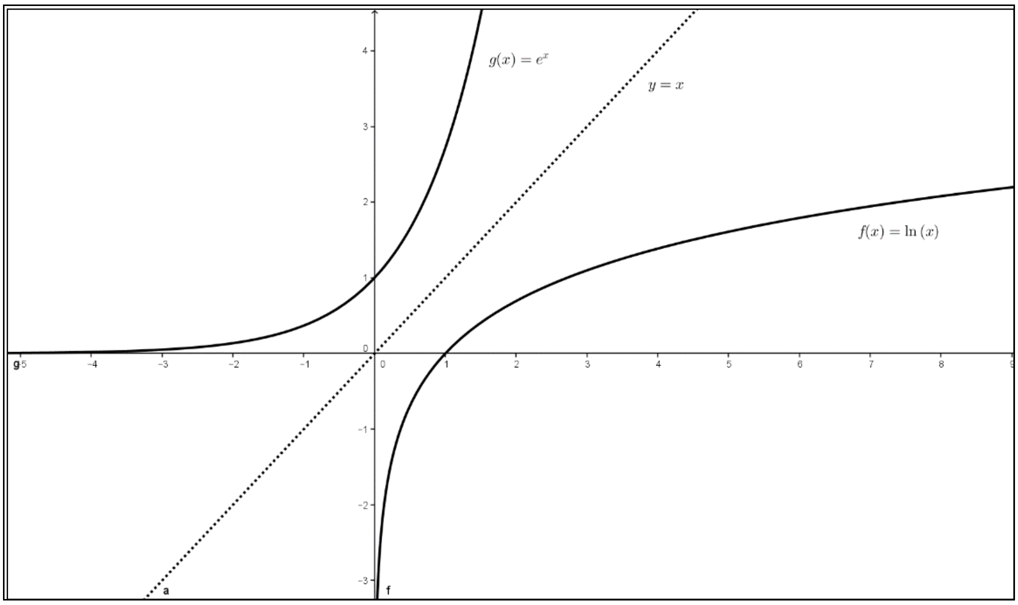


Propiedades de la gráfica del logaritmo

Todas las funciones logarítmicas son parecidas. Su forma cambia si la base es positiva y menor de 1 o si es mayor que 1. Las propiedades comunes a:

$f(x) = \log_b x$ si $1 < b$ son:

- Dominio: R+= (0, ∞)
  Ya que NO EXISTE ni log 0 ni log(*x*) si *x* es negativo.
- Asíntota vertical por la derecha: **x = 0**. Observa que no hay gráfica en los números negativos.
- No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.
- $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$
- Todas cortan al eje OX en el punto (1,0)
- No cortan al eje OY.
- Es una función creciente en (0, +∞)
- Cuanto mayor es la base del logaritmo el crecimiento de la función es más lento.
- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_b x$ y $g(x) = b^x$ son **simétricas** respecto de la bisectriz del primer cuadrante (la recta *y* = *x*)



OBSERVACIÓN: si utilizas la fórmula de cambio de base de logaritmos verás que puedes calcular todos los logaritmos neperianos a partir de los logaritmos decimales o viceversa:

$$f(x) = \ln(x) = \log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = 2{,}3025 \cdot \log_{10} x$$

Asimismo, la gráfica del logaritmo neperiano es el resultado de multiplicar aproximadamente por 2 la gráfica del logaritmo decimal, de modo que necesariamente se “parecen”.

Práctica

1. Comprueba la siguiente propiedad:

$$\log_{\frac{1}{b}} x = -\log_b x$$

2. Relaciona con la propiedad anterior los siguientes logaritmos, como en el ejemplo:

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 = -\log_2 32 = -5$$

(a) $\log_{\frac{1}{10}} 0.00001 =$

(b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} =$

(c) $\log_{\frac{1}{5}} 625 =$

(d) $\log_{\frac{1}{100}} 10^{12} =$

3. Utilizando la propiedad anterior representa la gráfica de la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ a partir de la gráfica de $g(x) = \log_2 x$

Veamos un ejemplo de función habitual que combina una potencia con el logaritmo

Función potencial - logarítmica

$$\boxed{f(x) = x \ln x}$$

- Dom(f)= $(0, +\infty)$ (¿asíntota en $x = 0$?)

- Cortes con ejes:

$$x \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Corta en } (1,0)$$

No corta al eje OY.

- Monotonía

$$f'(x) = (\ln x) + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$ (Posible extremo en $x = e^{-1}$.)

Tomamos un valor en cada uno de los intervalos $(0, e^{-1}) = (0, 0.36)$ y $(e^{-1}, +\infty)$ para evaluar el signo de la derivada en cada uno de ellos:

  - $f'(0.25) = \ln 0.25 + 1 = -1.38 + 1 < 0$
  - $f'(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$

Por tanto: f es CRECIENTE en $(e^{-1}, +\infty)$ y DECRECIENTE en $(0, e^{-1})$ y además en $x = e^{-1}$ la función presenta un MÍNIMO LOCAL.

- Curvatura

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \text{sin solución}$$ (No tiene puntos de inflexión)

$$f''(x)>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow$$ f es CONVEXA (**U**) en todo su dominio.

- Asíntotas

a) **Vertical**

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)=$¡#??!!! Y NO SE PUEDE APLICAR la Regla de L'Hôpital PORQUE LA FUNCIÓN NO ES UN COCIENTE, PERO… como $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)=(\text{indeterminación})=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)==\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=0$$

por tanto, la función **NO TIENE ASÍNTOTA VERTICAL** en $x=0$.

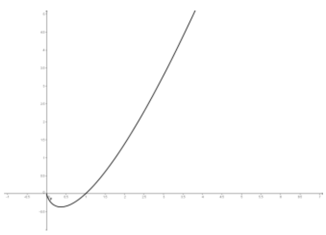
b) **Horizontal**

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln x)=\infty\cdot\infty=\infty$ y por tanto **NO HAY ASÍNTOTA HORIZONTAL**, lo que nos lleva a estudiar las asíntotas

c) **Oblicua:** $y = mx + h$

:

Como $\dfrac{f(x)}{x}=\ln x$, es obvio que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\infty$ y por tanto f **NO tiene ASÍNTOTA OBLÍCUA.**



Práctica

1. Analiza las funciones:

(a) $f(x)=x^2\ln x$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x=\dfrac{\ln x}{x}$