La derivada con fórmulas.

En el artículo anterior entendimos el concepto de derivada de una función en un punto. Analizamos el concepto de recta tangente y vimos que la derivada (¿de dónde procede ese número mágico?) aporta lo que necesitamos para resolver problemas.

En el tercer capítulo entenderemos el origen dela derivada. Pero antes, conozcamos su potencia. Bienvenido al cálculo diferencial.

Muchos descubrimientos científicos sólo son útiles si son eficaces. A menudo oirás estos dos conceptos. Disponer de una solución no significa resolver un problema, porque dicha solución teórica debe llevarse a la práctica y ser capaz de proporcionar las soluciones. El resto son elucubraciones teóricas.

El cálculo inventado por Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz, el concepto de derivada en nuestro lenguaje actual, no habría servido de mucho si no se hubiese encontrado un procedimiento mecánico, un proceso maravilloso de **derivación de una función** a partir de otra, que de forma casi automática proporciona la derivada de una función en un punto.

Verás, aprendiste a sumar o a multiplicar con una tabla de multiplicar. Es un procedimiento natural porque lo que aprendiste sin saberlo es la tabla de operación de un **grupo**. Con esa tabla has resuelto todos los problemas de sumas y multiplicaciones y ya puestos de restas y de divisiones. Aprendiste a calcular.

Pues con las técnicas del cálculo infinitesimal, aprenderás a operar con cantidades pequeñas – infinitesimales- como si fuera con una tabla de multiplicar, aunque con reglas algo más difíciles.

Resumen

Dada una función f

$$f : D \subset R \to R$$
$$x \to f(x)$$

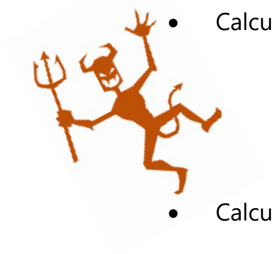
consideremos un punto a $a \in D$. Hemos asignado -si es posible- al valor $x = a$ un número denominado "la derivada de la función f en a" o "la derivada de f en a" o "la derivada en a".

Este valor "misterioso" nos proporcionará la **pendiente**, es decir la inclinación sobre la horizontal, de **la recta que es tangente a la gráfica** de f por el punto $(a, f(a))$.

Por qué la derivada en un punto NO soluciona ningún problema.

Para calcular una derivada en un punto hay que calcular un límite de un cociente que siempre proporciona una indeterminación 0/0= ¿#!!¿? que hay que determinar.

Un ejemplo te mostrará la dificultad intrínseca del cálculo de una derivada:



- Calcular la derivada de la función $f(x) = \log(x)$ en el punto x = 2.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\log(x) - \log(2)}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = ¿@ \sim \#?$$

- Calcular la derivada de la función $g(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ (x) en el punto x = 2.

$$g'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{g(x) - g(2)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{x^2-1}{\sqrt{x}} - \frac{4^2-1}{\sqrt{4}}}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{x^2-1}{\sqrt{x}} - \frac{15}{2}}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{2x^2-2-15\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2x^2-2-15\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(x-4\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = ¿@ \sim \#?$$

Se hace evidente que, **sin reglas de un cálculo eficiente**, estas derivadas son muy muy difíciles de utilizar.

Pero la Naturaleza reservaba una sorpresa: las funciones elementales siguen reglas precisas para obtener su inclinación. La derivada podía obtenerse mediante **procedimientos de derivación automáticos**. Las reglas de cálculo.

Con ellas obtener la derivada de $g(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ en x = 4 es como sigue:

$$g'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)}{x} = \frac{4x^2-(x^2-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2+1}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(4) = \frac{49}{16} = 3{,}0625$$

Y ya <u>de paso</u> con la misma regla calculamos:

$$g'(1) = \frac{4}{2} = 2 \qquad g'(9) = \frac{244}{48} = \frac{122}{24} = \frac{61}{12} \qquad g'(2) = \frac{13}{4\sqrt{2}} \text{ etc.}$$

Pero es aún más sencilla la función derivada de $f(x) = \log(x)$ que es: $f'(x) = 1/x$ y así

Función derivada de una función dada

Sea *f* una función real de variable real a la que le pedimos dos condiciones:

- que sea continua en un intervalo I y
- que pueda encontrarse la derivada (hágase eso como se haga) en cada uno de los puntos del intervalo *I*.

Vamos a construir una nueva función *f '*,la llamaremos **función derivada de *f*** definida por:

$$\frac{df}{dx} = f\,' : I \subset R \to R$$

$$a \to f\,'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

Y que asigna a cada punto *x* del intervalo *I*, el valor de la derivada de la función *f* en el punto $x = a$.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2$, cuya gráfica es una parábola sencilla. Puedes confiar en que la función derivada de *f* es:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \left(x^2\right)' = f\,' : I \subset R \to R$$

$$a \to f\,'(a) = \frac{df}{dx}(a) = 2a$$

Reglas de derivación

Enlace