Límite de una función

Introducción

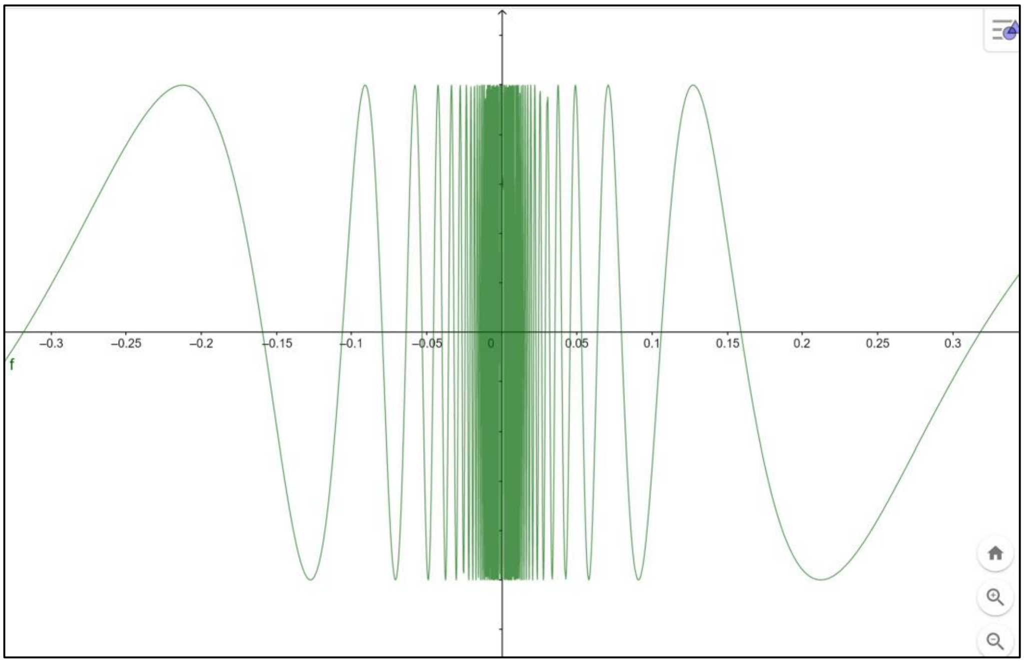
Queremos definir el concepto

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

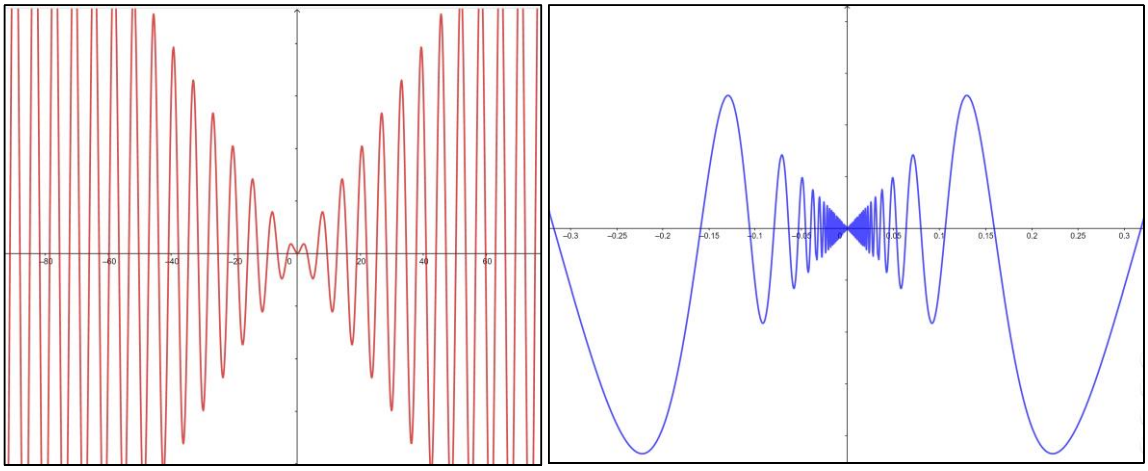
con la idea de definir con precisión la **tendencia** de una función alrededor de un punto *a* que es objeto de estudio.

¿Por qué estudiar la tendencia?

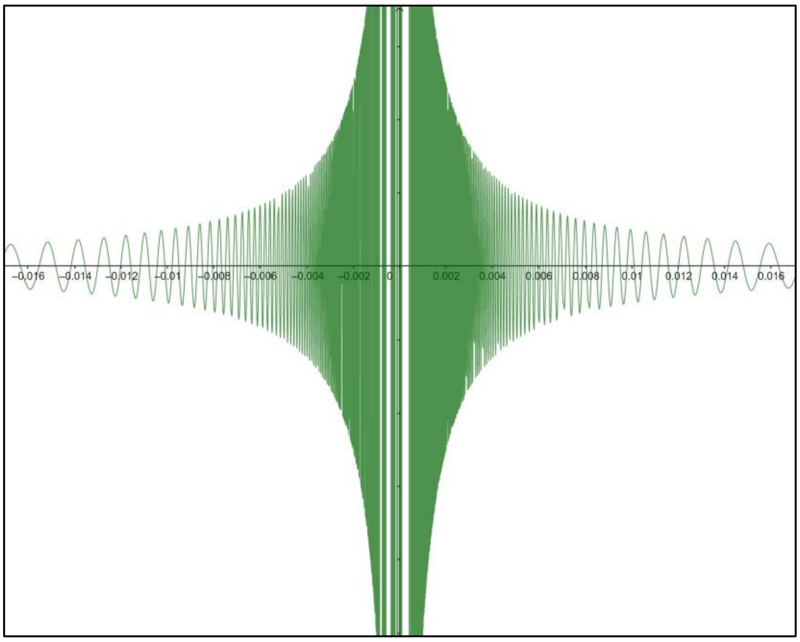
Por muchas razones. Pero una muy sencilla es que a menudo las funciones tienen puntos "problemáticos". Los modelos se usan para explicar los fenómenos, en los que a menudo aparecen valores críticos en los que no es fácil estudiarlos. Por otra parte no siempre es fácil *ver* el comportamiento de una gráfica.
Como ejemplos, a continuación, tienes gráficas de funciones que se obtienen con el seno, el coseno y x. Observa que ya no es tan fácil ver la gráfica y saber el límite en algunos puntos. La propia gráfica es confusa incluso con un simulador:



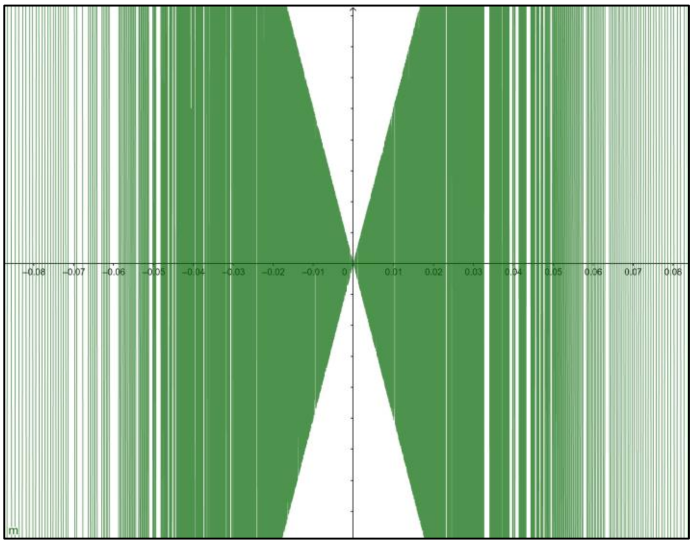
¿Te atreves a decir lo que pasa cerca de x = 0?



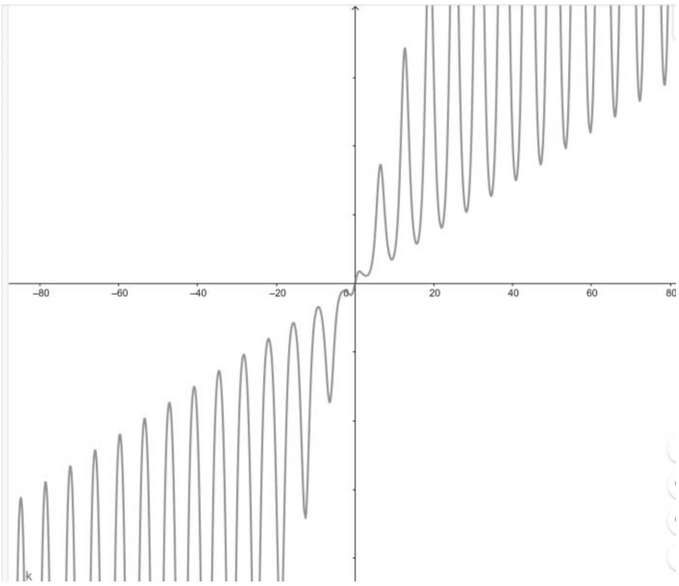
¿Se puede asegurar que estas gráficas NO tienen un *agujerito* (discontinuidad) en el punto (0,0)?



¿Qué sucede alrededor del punto x =0?
¿Por qué aparecen unas bandas blancas que luego ya no se ven?



Las bandas blancas que se observan en esta otra gráfica
¿Son fruto del sistema de representación o de la propia función? ¿Son discontinuidades?



Por lo tanto, tenemos que disponer de mecanismos que puedan analizar estas situaciones y cualquier otra que se presente del mismo estilo.
La idea es que si *x* es un punto que no pertenece al dominio de definición de *f*, entonces NO podemos conocer el valor de la función en dicho punto. Pero sí que podemos conocer su valor en los puntos que están alrededor de *x* sin ser el propio *x*, y obtener el comportamiento de *f* cerca de ese punto irregular. No olvides que R es un conjunto continuo (completo) y nuestras funciones son de variable real.
Esta es la idea del **límite de una función en un punto**.

EJEMPLO #1

La función que proporciona la atracción entre la Tierra y un cuerpo viene dada por la conocida fórmula de Newton:

$$F(r,m) = G\frac{M_t m}{r^2}$$

en la que G (constante de gravitación universal), M_t (masa de la Tierra) son constantes. Y por tanto si los operamos obtenemos una versión del tipo:

$$F(r,m) = k\frac{m}{r^2}$$

Si hacemos que *m* tome un valor cualquiera (tu masa corporal por ejemplo) la función queda reducida a

$$F(r) = \frac{km}{r^2} = \frac{k'}{r^2}$$

Que nos informa que para una **masa** dada **(*m*)** la **fuerza** con la que **la Tierra** la **atrae** (y la fuerza con ese cuerpo atrae a la Tierra) **adquiere forma de "*inverso al cuadrado*"**.
Pero si $r = 0$ la fórmula de Newton es inválida. Sencillamente **no es evaluable** cuando los dos cuerpos (dos masas puntuales) están a distancia 0.

$$F(0) = \frac{km}{0^2} = ¡!$$

Pero utilizando el cálculo de límites podemos **asegurar** que lo que sucede es que la fuerza de atracción "se hace INFINITA". Lo que no significa que "valga INFINITO" $\frac{k'}{0} = \infty$. Esa expresión es sencillamente carente de significado en este contexto.[1] Nunca es infinita, porque eso no tiene sentido; sólo podemos decir que **la fuerza de atracción aumentará sin límite**, será tan grande como se desee con tal de que reduzcamos el radio que separa la distancia entre la tierra y el objeto (dos simples puntos).

EJEMPLO #2

Si calculo el valor de $f(x)= \ln(x+1)$ y el de $g(x) = x$ cuando los valores de x se hacen arbitrariamente pequeños, muy pequeños, tan próximos a cero como quiera… ¿Cómo serán esos valores?

(a) ¿Muy parecidos, aunque pequeños?
(b) ¿Pequeños pero muy diferentes?
(c) ¿Prácticamente iguales?
(d) ¿Podré sustituir uno por otro sin caer en errores?

Observa la tabla de valores:

x	ln(x+1)	x/ln(x+1)
0,1	0,0953101798043249000000000000000	**1,049205869**
0,0500000000000000000000000000	0,0487901641694320000000000000000	**1,024796716**
0,0250000000000000000000000000	0,0246926125903714000000000000000	**1,012448558**
0,0125000000000000000000000000	0,0124225199985571000000000000000	**1,00623706**
0,0062500000000000000000000000	0,0062305497506361600000000000000	**1,003121755**
0,0031250000000000000000000000	0,0031201273362436800000000000000	**1,001561687**
0,0015625000000000000000000000	0,0015612805669524100000000000000	**1,000781047**
0,0007812500000000000000000000	0,0007809449830713510000000000000	**1,000390574**
0,0003906250000000000000000000	0,0003905487259171720000000000000	**1,0001953**
0,0001953125000000000000000000	0,0001952934289968790000000000000	**1,000097653**
0,0000976562500000000000000000	0,0000976514819387473000000000000	**1,000048827**
0,0000488281250000000000000000	0,0000488269329458638000000000000	**1,000024414**
0,0000244140625000000000000000	0,0000244137644817155000000000000	**1,000012207**
0,0000122070312500000000000000	0,0000122069567448448000000000000	**1,000006103**
0,0000061035156250000000000000	0,0000061034969985354800000000000	**1,000003052**
0,0000030517578125000000000000	0,0000030517531558521900000000000	**1,000001526**
0,0000015258789062500000000000	0,0000015258777421867800000000000	**1,000000763**
0,0000007629394531250000000000	0,0000007629391621312520000000000	**1,000000381**
0,0000003814697265625000000000	0,0000003814696537141250000000000	**1,000000191**
0,0000001907348632812500000000	0,0000001907348450469490000000000	**1,000000096**
0,0000000953674316406250000000	0,0000000953674271819696000000000	**1,000000047**
0,0000000476837158203125000000	0,0000000476837147278531000000000	**1,000000023**
0,0000000238418579101563000000	0,0000000238418575371213000000000	**1,000000016**
0,0000000119209289550781000000	0,0000000119209288396149000000000	**1,00000001**
0,0000000059604644775390600000	0,0000000059604645485933400000000	**0,999999988**
0,0000000029802322387695300000	0,0000000029802322787375600000000	**0,999999987**
0,0000000014901161193847700000	0,0000000014901160294567000000000	**1,00000006**
0,0000000007450580596923830000	0,0000000007450580150059060000000	**1,00000006**
0,0000000003725290298461910000	0,0000000003725291185946440000000	**0,999999762**
0,0000000001862645149230960000	0,0000000001862645593146690000000	**0,999999762**

[1] Sin embargo, el no bien ponderado Brahmagupta por el s. VII se atrevió a formular un cociente similar al anterior, siendo tomado como el primero en hablar con un pasmo inusitado en la época sobre las cantidades infinitamente pequeñas, y el significado del infinito. Brahmagupta fue invitado a la Casa de la Sabiduría de Bagdad, dónde probablemente introdujo a Al-Khwarizmi. –bibliotecario y residente de la prestigiosa institución bagdadí- el uso del cero y del sistema de numeración decimal posicional.

El cálculo del **límite del cociente** de los **dos infinitésimos** anteriores nos habla de su comportamiento:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

El límite de valor 1 nos dice que las respuestas a las preguntas anteriores son:
(a) **Verdadera** (b) **Falsa** (c) **Verdadera** y (d) **Verdadera**

Cuidado con la forma en que se los infinitésimos se acercan a cero. Observa esta otra tabla y toma tus conclusiones.

x	ln(x+1)	sen(x)	x/ln(x+1)	sen(x)/x	sen(x)/x^2
0,1	0,09531017980432490	0,09983341664682820000	**1,049205869**	**0,99833416647**	**9,98**
0,050000000000000000	0,04879016416943200	0,04997916927067830000	**1,024796716**	**0,99958338541**	**19,99**
0,025000000000000000	0,02469261259037140	0,02499739591471230000	**1,012448558**	**0,99989583659**	**40,00**
0,012500000000000000	0,01242251999855710	0,01249967448170980000	**1,00623706**	**0,99997395854**	**80,00**
0,006250000000000000	0,00623054975063616	0,00624995930997531000	**1,003121755**	**0,99999348960**	**160,00**
0,003125000000000000	0,00312012733624368	0,00312499491373946000	**1,001561687**	**0,99999837240**	**320,00**
0,001562500000000000	0,00156128056695241	0,00156249936421720000	**1,000781047**	**0,99999959310**	**640,00**
0,000781250000000000	0,00078094498307135	0,00078124992052714300	**1,000390574**	**0,99999989827**	**1280,00**
0,000390625000000000	0,00039054872591717	0,00039062499006589300	**1,0001953**	**0,99999997457**	**2560,00**
0,000195312500000000	0,00019529342899688	0,00019531249875823700	**1,000097653**	**0,99999999364**	**5120,00**
0,000097656250000000	0,00009765148193875	0,00009765624984477960	**1,000048827**	**0,99999999841**	**10240,00**
0,000048828125000000	0,00004882693294586	0,00004882812498059740	**1,000024414**	**0,99999999960**	**20480,00**
0,000024414062500000	0,00002441376448172	0,00002441406249757470	**1,000012207**	**0,99999999990**	**40960,00**
0,000012207031250000	0,00001220695674484	0,00001220703124969680	**1,000006103**	**0,99999999998**	**81920,00**
0,000006103515625000	0,00000610349699854	0,00000610351562496210	**1,000003052**	**0,99999999999**	**163840,00**
0,000003051757812500	0,00000305175315585	0,00000305175781249526	**1,000001526**	**1,00000000000**	**327680,00**
0,000001525878906250	0,00000152587774219	0,00000152587890624941	**1,000000763**	**1,00000000000**	**655360,00**
0,000000762939453125	0,00000076293916213	0,00000076293945312493	**1,000000381**	**1,00000000000**	**1310720,00**
0,000000381469726563	0,00000038146965371	0,00000038146972656249	**1,000000191**	**1,00000000000**	**2621440,00**
0,000000190734863281	0,00000019073484505	0,00000019073486328125	**1,000000096**	**1,00000000000**	**5242880,00**
0,000000095367431641	0,00000009536742718	0,00000009536743164063	**1,000000047**	**1,00000000000**	**10485760,00**
0,000000047683715820	0,00000004768371473	0,00000004768371582031	**1,000000023**	**1,00000000000**	**20971520,00**
0,000000023841857910	0,00000002384185754	0,00000002384185791016	**1,000000016**	**1,00000000000**	**41943040,00**
0,000000011920928955	0,00000001192092884	0,00000001192092895508	**1,00000001**	**1,00000000000**	**83886080,00**
0,000000005960464478	0,00000000596046455	0,00000000596046447754	**0,999999988**	**1,00000000000**	**167772160,00**
0,000000002980232239	0,00000000298023228	0,00000000298023223877	**0,999999987**	**1,00000000000**	**335544320,00**

EJEMPLO #3

Estoy estudiando un fenómeno que involucra esta incomoda función que necesito evaluar cerca de t = 1:

$$h(t) = \frac{sen(t^2 - 1)}{t - 1}$$

La función no es evaluable si t = 1, pero

¿Podré realizar el cambio $m(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t - 1} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t-1} = t + 1$ sustituyendo $sen(t^2 - 1)$ por $(t^2 - 1)$ y usando $m(t)$ en lugar de $h(t)$ sin **pérdida sustancial** de exactitud? Porque eso simplificaría mucho el problema.

Y sí, ciertamente puedo hacer esa sustitución.
Si t se parece a 1, no tengo problemas en decir que mi función h va a tomar un valor muy parecido a h(1) ~ m(1)= 1+1 = 2 cerca de t = 1. Cosa que no podíamos afirmar cuando evaluamos

$$h(1)=\frac{sen(1^2-1)}{1-1}=\frac{sen(0)}{0}=\frac{0}{0}=¿\#!!?¡"@?$$

EJEMPLO #4

Mi calculadora tiene una tecla $\boxed{e^x}$ que me calcula la exponencial de base e. Me han dicho que el *micro-chis* que incorpora la calculadora utiliza un polinomio para calcular ese valor:
El polinomio, para calcular $e^{(2.5)}$ es este:

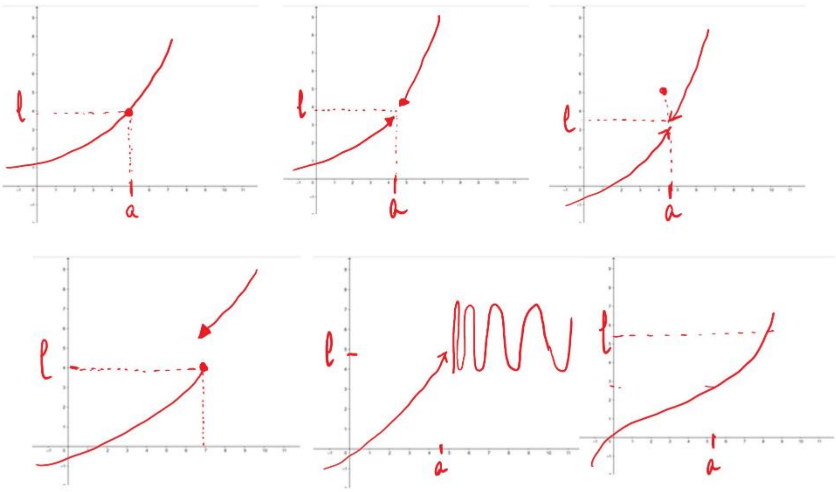
$$e^{2.5}=1+\frac{2.5}{1}+\frac{(2.5)^2}{2\cdot 1}+\frac{(2.5)^3}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{(2.5)^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\frac{(2.5)^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\cdots$$

Que proporciona un valor APROXIMADO DE $e^{(2.5).}$ ¿Cuánto error cometemos si tomamos sólo cinco términos de ese polinomio en lugar de 15 términos? ¿Cómo podemos saber o limitar el error que cometemos entre el valor real y el que estimamos cuando NOS olvidamos de los infinitos términos que quedan por sumar y que *despreciamos*?

Se hace necesario un método de cálculo simbólico que permita hallar los límites sin necesidad de realizar esta asombrosa cantidad de cálculos.

Límite de una función en un punto

Queremos distinguir las siguientes situaciones (ABC/ DEF):



Para ello adoptamos las siguientes definiciones que tratan de expresar las ideas de la introducción.

DEFINICIÓN PROVISIONAL 0

Una función es continua si su gráfica puede ser tazada sin levantar el lápiz del papel.
Sólo A y F son continuas**.**

DEFINICIÓN PROVISIONAL 1

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ significa que los valores de la función *f* se hacen tan parecidos al valor *l*, (se aproximan al valor l tanto como se desee) con tal de que los valores *x* los tomemos suficientemente cercanos a *a*.

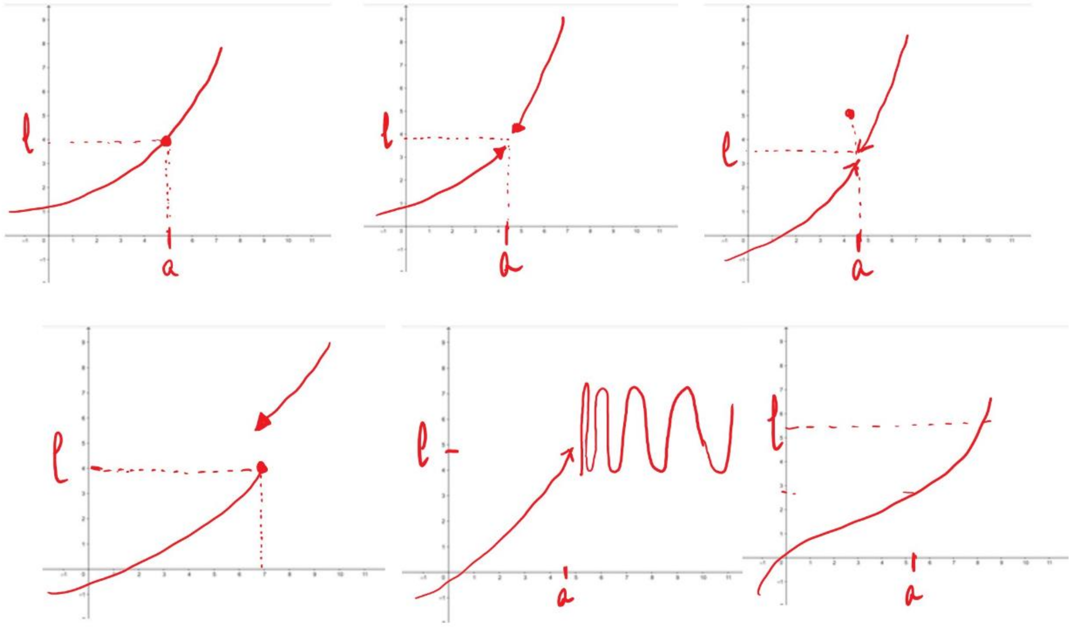
DEFINICIÓN PROVISIONAL 2

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ significa que cualquier sucesión de puntos $\{a_n\}$, que se aproxime al valor *a*, la sucesión de sus transformados por *f*, $\{ f(a_n)\}$, se acerca a *l*. Y esto para cualquier sucesión que converja al punto a.

DEFINICIÓN PROVISIONAL 3

Dado un entorno alrededor del límite $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ siempre se puede encontrar un entrono – aunque sea pequeño- alrededor del punto *a*, $(a - \delta, a + \delta)$ de forma que
$f((a - \delta, a + \delta))$ $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, es decir *si* $a - \delta < x < a + \delta$, entonces $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Algunas observaciones



i. El valor del límite de una **función continua** en un punto **es igual** al valor de la función en dicho punto. (A)
ii. El valor del límite de una función **no depende** de que el punto pertenezca al **dominio**, es decir de que la función esté definida ene se punto. (B)
iii. Y si el punto es del dominio de definición, el valor del límite **no depende** del valor de la **función** en dicho punto. (C)
iv. El valor del límite **no depende** del *camino* que se escoja para acercarse al punto de estudio (D) y **no** puede tener **dos valores diferentes**.
v. Puede ser que la función se aproxime a un valor a la izquierda de un punto y que ni siquiera tenga límite por la derecha del mismo punto. (E) .
vi. **Si el límite existe, este es único**. (F) .

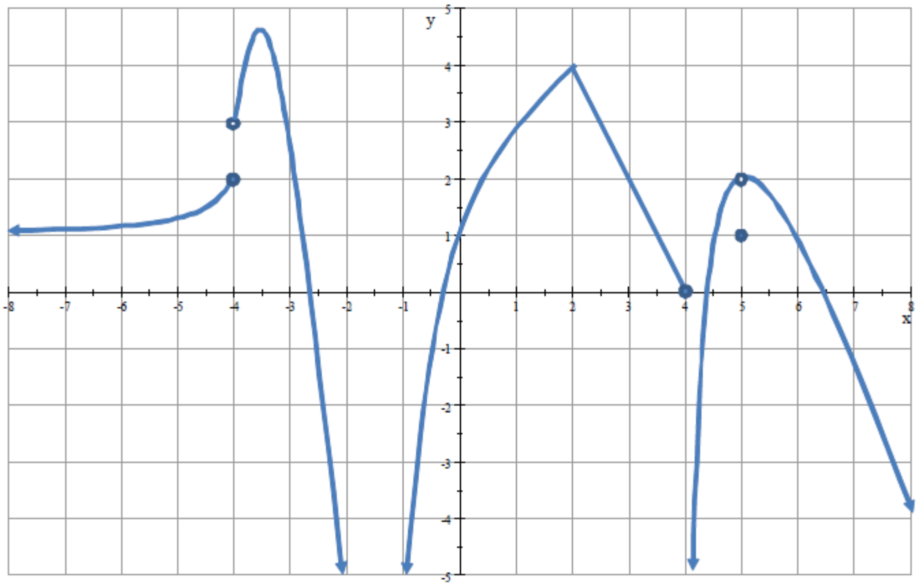
El límite de una función es interesante en el caso de que la función **presente algún problema en un determinado punto a**. Siempre *queremos* que las funciones sean continuas, eso tranquiliza al matemático, y en ellas los límites no tienen mucho valor más allá de la tranquilidad de no tener que hacer uso de ellos por lo que ya se ha indicado en i.
Pero si una función tiene una discontinuidad, si tiene algún punto problemático, se hace preciso indagar cómo se comporta alrededor del punto.

Así que el valor de la función $f(a)$ en el punto a en el que se estudia su comportamiento, **no interviene en el cálculo del límite**, cómo si no existe. En cambio, conocer a priori la continuidad de la función nos ayuda a calcular los límites.

Por ejemplo:
- A, B y C tienen límite l en el punto a.
- D tiene límite a ambos lados del punto a, pero no coinciden. No hay límite.
- En E, la función por la derecha es oscilante y no tienen límite, mientras que por la izquierda si tiene límite l.
- En F, la función continua NO tiene límite l. Tiene por límite f(a) que es distinto de l.

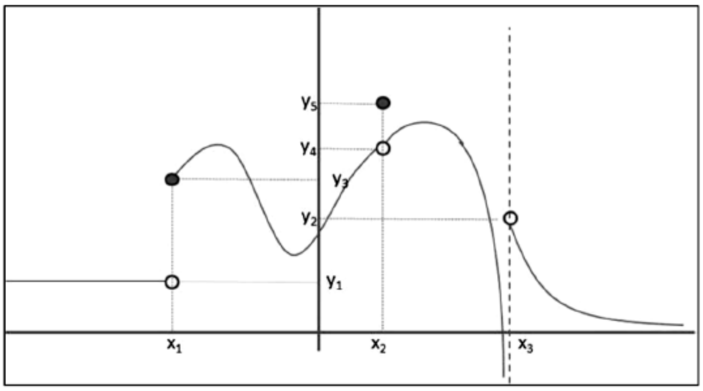
EJERCICIO.

Decide el valor del límite de la función siguiente en los puntos -4, -2, -1, 2, 4, 5.



Test

La siguiente imagen representa la gráfica de la función *f*.



Sobre ella responde a las siguientes preguntas marcando **V**erdadero o **F**also:

i. No existe $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x)$ ☐ **V** ☐ **F**

ii. La función no está definida en x_1. ☐ **V** ☐ **F**

iii. $\lim\limits_{x \to x_2} f(x) = y_4$ ☐ **V** ☐ **F**

iv. La función es continua en x_2. ☐ **V** ☐ **F**

v. $\lim\limits_{x \to x_3^+} f(x) = y_2$ ☐ **V** ☐ **F**

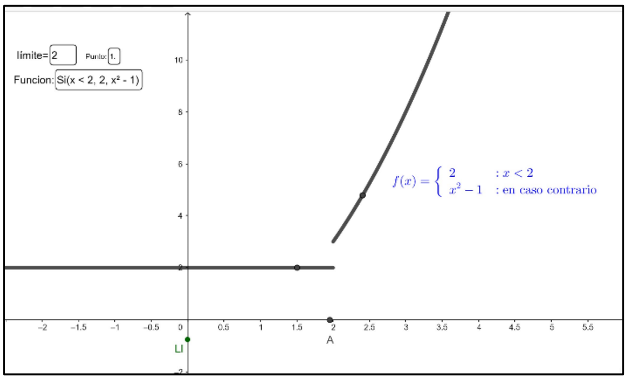
vi. No existe $\lim\limits_{x \to x_3^+} f(x)$. ☐ **V** ☐ **F**

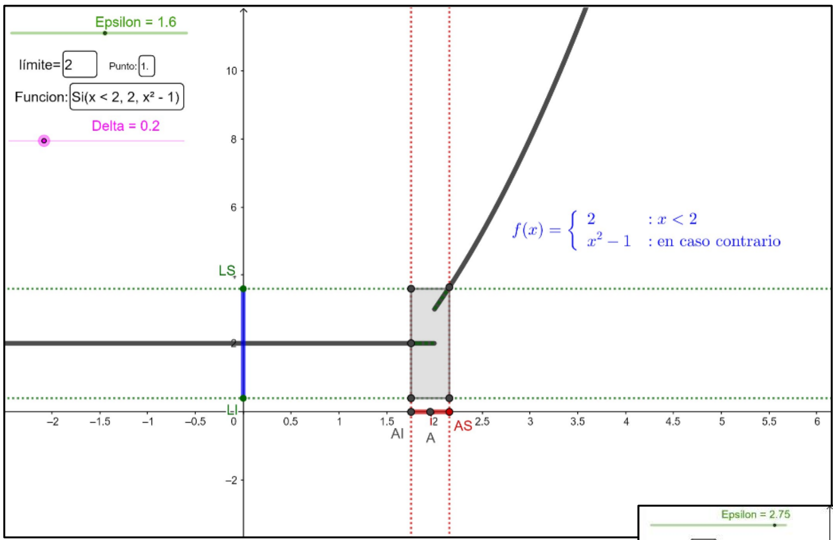
vii. La función tiene una asíntota vertical. ☐ **V** ☐ **F**
Escribe su ecuación si la respuesta es afirmativa: ……..…………………………...

viii. La función tiene asíntotas horizontales. ☐ **V** ☐ **F**
Escribe sus ecuaciones si la respuesta es afirmativa: ………………………………...

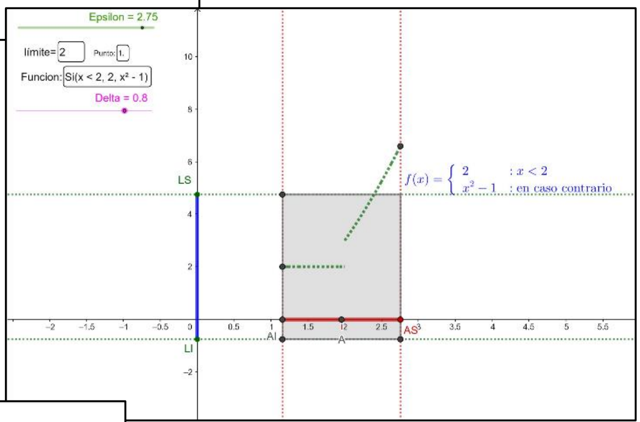
¿Qué sucede en una discontinuidad?

Disponemos la siguiente función que es a todas luces discontinua en $x = 2$.
¿Cómo podemos comprobar que lo que nos dicen los ojos es lo que es?
¿Cómo llegar a concluir que en efecto, ESA FUNCIÓN NO DEBERÍA TENER LÍMITE EN x = 2? ¿Cómo formalizar eso de acercarse tanto cómo se quiere a *a*, etc.?

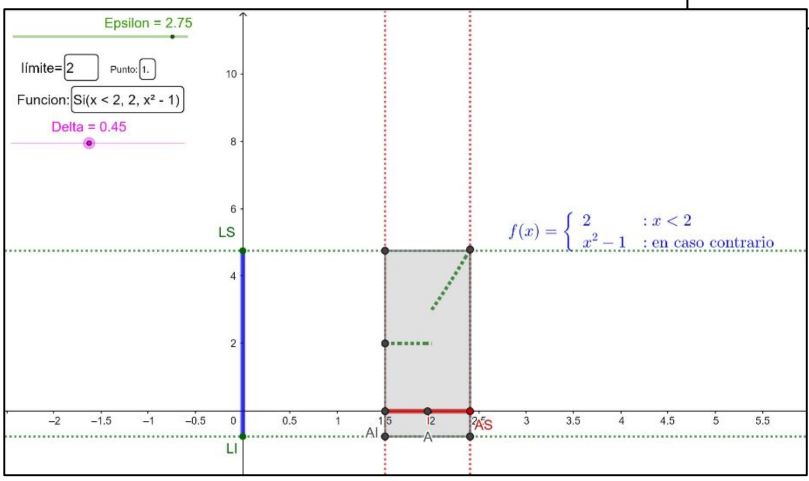




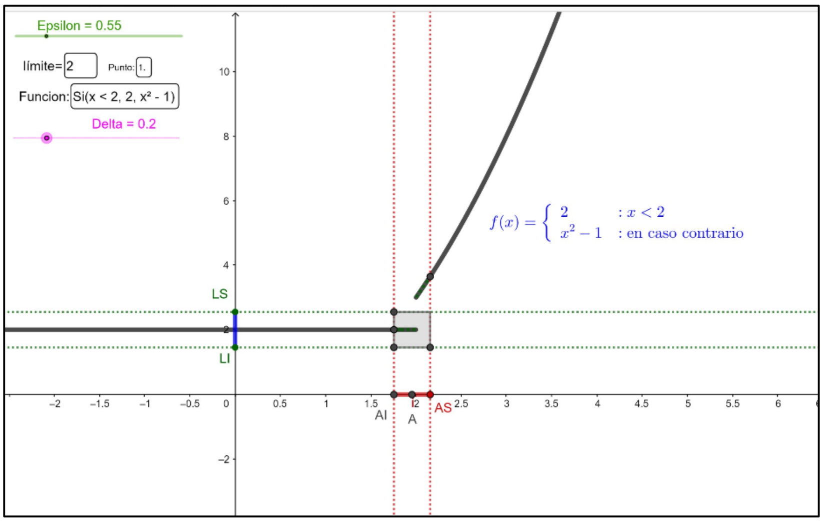
El método consiste en considerar una banda horizontal alrededor del supuesto límite (azul), y ser capaces de encontrar una banda vertical (roja) para que toda la gráfica se encuentre en el rectángulo gris delimitado por las bandas rojas y azul.
En el primer caso, hemos encontrado ese intervalo rojo que se transforma por la función dentro del intervalo en azul.



Fíjate que podemos encontrar **vecindades** del punto *a*, de forma que la gráfica *salga* del rectángulo gris (derecha). Pero lo importante es que, si hacemos <u>muy pequeño</u> el intervalo rojo, es decir, estamos muy cerca de *a*, entonces la gráfica está en una banda muy estrecha alrededor del límite (abajo). Así que parece bastante difícil **desenmascarar a la discontinuidad visible.**



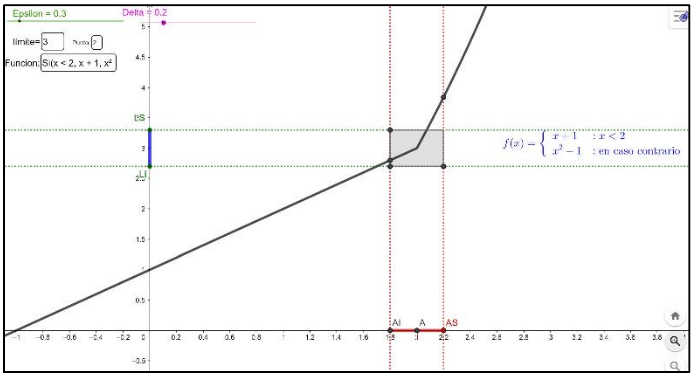
Si somos sagaces, la discontinuidad se descubrirá: para ello si tenemos que buscar un intervalo *malicioso*, muy estrecho, alrededor del límite, de manera que siempre haya valores de x, números muy próximos a a, a los que la función transforma en valores alejados del límite, fuera del rectángulo inicial. NO hay forma de que la gráfica se encuentre dentro del rectángulo gris, por muy cerca que tomemos el punto de a. No se puede asegurar que valores cercanos a a, proporcionen valores cercanos a l. Con tal de que haya una situación, **LA DISCONTINUIDAD QUEDA DESENMASCARADA**.

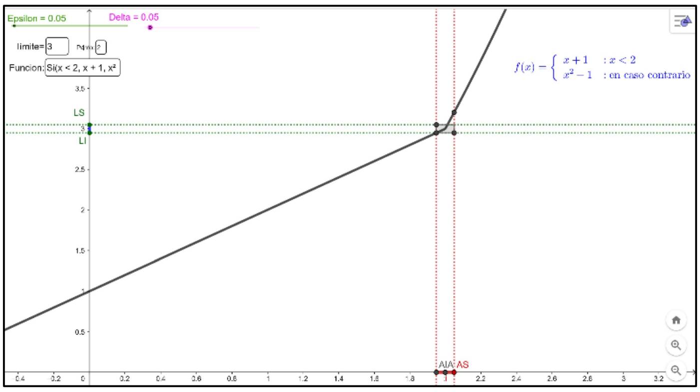


Con habilidad hemos encontrado una situación incómoda para el fenómeno (la gráfica) encontraremos una banda horizontal alrededor del supuesto límite y la gráfica no entra en el rectángulo gris, por mucho que el intervalo rojo se haga pequeño. No es posible estar tan cerca del valor límite como sería deseable.

Observa que la situación anterior **no puede darse si el límite existe en el punto**.

La siguiente función **tiene límite** en $a = 2$ y vale 3. Por muy estrecha que seleccionemos la banda horizontal alrededor del límite, se puede conseguir que la gráfica se encierre en una banda tan estrecha como se decida, con tal de tomar x, próximo a a.





Definición

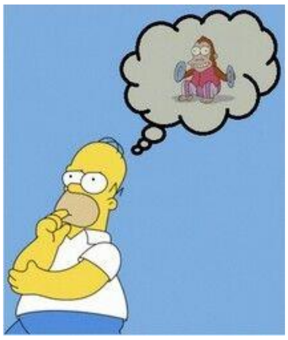
$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

- Para cualquier número positivo ε > 0, se puede encontrar otro número δ > 0 de forma que se puede asegurar que entonces $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ siempre que $a - \delta < x < a + \delta$.
- Para todo ε > 0, existe un δ > 0 de forma que si $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Piensa. Avanzado

NO es lo mismo decir $0 < |x - a| < \delta$ que decir $0 \le |x - a| < \delta$.
Por ejemplo, no son los mismos conjuntos A y B definidos por:
$A = \{x \text{ REAL} \mid 0 < |x - 2| < 1\}$ $B = \{x \text{ REAL} \mid 0 \le |x - 2| < 1\}$

¿Dónde está la **diferencia**?



Operaciones con límites.

Si conocemos los límites de las funciones que componen una función compuesta, podemos operar los límites del mismo modo que las funciones.
Así **si las expresiones no son indeterminadas** (más adelante) se cumple que:

- el límite de la suma/resta es la suma/resta de los límites
- el límite del producto es el producto de los límites
- el límite del cociente es el cociente de los límites (si no se divide por cero).

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{x+5}+\ln(x+1)-e^{x+3}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+5}+\lim_{x\to 0}\left(\ln(x+1)\right)-\lim_{x\to 0}e^{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim\limits_{x\to 0}x+5}+\ln\left(\lim_{x\to 0}(x+1)\right)-e^{\lim\limits_{x\to 0}x+3}=$$

$$=\frac{0}{0+5}+\ln(1)-e^{0+3}=-e^{3}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{2}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+1}+\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-1}{\lim\limits_{x\to 0}x+1}+\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\sqrt{x+1}}{2}=$$

$$=\frac{-1}{1}+\frac{-1\sqrt{1}}{2}=-\frac{3}{2}$$

Ejemplo 3

Si disponemos de expresiones con funciones elementales que son continuas, siempre procedemos intercambiar el <u>operador límite</u> con la <u>función</u>.

$$\lim_{x\to 0}\left(\log\left(\frac{x}{x+5}+1\right)\right)=\log\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+5}+1\right)=\log\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+5)}+1\right)=\log\left(\frac{0}{5}+1\right)=0$$

Atención con el significado de los límites.

Es fundamental distinguir entre dos situaciones:

(a) la operación $a=\frac{3}{0}=\infty$

(b) el límite de la función:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4-x}{x^2-1}\right)=\frac{\lim_{x\to 1} 4-x}{\lim_{x\to 1} x^2-1}=\left(\frac{4-1}{1-1}\right)=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

que acaba haciendo pensar que existe una tabla de multiplicar del tipo:

$$\frac{3}{0}=\infty \Leftrightarrow 0\cdot\infty=3 \Leftrightarrow \frac{3}{\infty}=0$$

Y que obviamente es una **incongruencia intelectual**, (aunque hay una verdad escondida en una de las equivalencias anteriores).

Decir que, como regla de cálculo de límites:

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$ y escribir $\frac{3}{0}=\infty$ **no es más que una regla nemotécnica**. Vista como una igualdad algebraica, es una aberración intelectual.

Su **profundo** significado, profundo desde todos los puntos de vista, es que decir que

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

significa que si con tal de tomar valores suficientemente próximos a $x = 1$, una función f tiene límite 3, y otra función g se acerca a 0, entonces el cociente de ellas, $\frac{f(x)}{g(x)}$ será tan grande como se desee con tal de que x se aproxime a 1, es decir:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\infty$$

muy diferente que decir que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\infty\cdot$$

TODO eso es el significado de la expresión que usamos a menudo sin control:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

Reflexionemos análogamente sobre el significado de un límite cuya demostración requiere geometría y un poco de trigonometría y de cuya verdad pido al lector su fe pendiente de una demostración (avanzada) que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{\lim_{x\to 0} sen(x)}{\lim_{x\to 0} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

Lo que significa que ese límite valga 1, no es ningún caso que $\frac{0}{0}=1 \Leftrightarrow 0=0\cdot 1$

sino que si evaluamos la función $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ en las proximidades de $x = 0$ obtendremos valores tan próximos a 1 como deseemos. Y ello no llevará a poder reemplazar sen(x) por x en determinados cálculos, o a poder interpretar que los **valores** que **proporciona sen(x)** y x son **tan parecidos** que **uno puede sustituir al otro** (en determinadas situaciones)

Límites laterales

El límite de una función, si existe, **no depende** del modo en el que se realice la aproximación al punto "problema" que es objeto de estudio. En las funciones de variable real, la aproximación a un determinado punto puede hacerse por la izquierda, por la derecha o alternadamente.
Por ejemplo, las sucesiones siguientes **se aproximan a 0** por la derecha, por la izquierda y alternadamente.

$$d_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{2^n} \to 0$$
$$i_n - \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots -\frac{1}{3^n} \to 0$$
$$a_n = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{81}, \ldots \frac{1}{2^n}, -\frac{1}{3^n} \to 0$$

Si una función tiene límite en 0, entonces si evaluamos las sucesiones de los puntos obtenidos al transformar estas tres sucesiones (y con todas las que se nos ocurran) DEBE obtenerse el mismo valor.

Un ejemplo. Sea la función *f* definida a trozos y vamos a estudiar el comportamiento de los puntos obtenidos al transformar las tres sucesiones anteriores:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

- Si nos aproximamos por la izquierda de x = 0 con la sucesión de puntos i_n obtenemos de límite 0:

$$f(i_n) = f\left(-\frac{1}{3}\right), f\left(-\frac{1}{9}\right), f\left(-\frac{1}{27}\right), f\left(-\frac{1}{81}\right), \ldots f\left(-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{729}, \frac{1}{6561}, \ldots \to 0$$

- Si nos aproximamos por la derecha de $x = 0$ con d_n obtenemos un límite infinito:

$$d_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{2^n} \to 0$$
$$f(d_n) = f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{8}\right), f\left(\frac{1}{16}\right), \ldots f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 4, 8, 16, 32, \ldots 2 \cdot 2^n \to +\infty$$

- Si nos aproximamos alternando derecha e izquierda, $x = 0$ con a_n obtenemos que no hay límite.

$$a_n = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{81}, \ldots \frac{1}{2^n}, -\frac{1}{3^n} \to 0$$
$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(-\frac{1}{9}\right), f\left(\frac{1}{8}\right), f\left(-\frac{1}{27}\right) \ldots f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{3^n}\right) \ldots =$$
$$= 4, \frac{1}{9}, 8, \frac{1}{81}, 16, \frac{1}{729}, 32, \ldots \to ¿+\infty / 0?$$

Los límites laterales son de obligado estudio siempre que la función esté definida a trozos.

Ejercicio.

i. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones definidas a trozos.
ii. Calcular los límites en los puntos aislados que no son del dominio.
iii. Calcular los límites en los puntos en los que cambia la definición. Y Realiza ii. y iii. escribiendo todos los pasos de los límites que realizas. TODOS los pasos.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+1 & si\ \ x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ \ 1<x<5 \\ x+1 & si\ \ x\ge 6 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x^3-2x} & si\ \ x>0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ \ x<-4 \\ 2^x & si\ \ -4<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ \ 1<x\le 7 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ \ x>0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ \ x\le 0 \end{cases}$

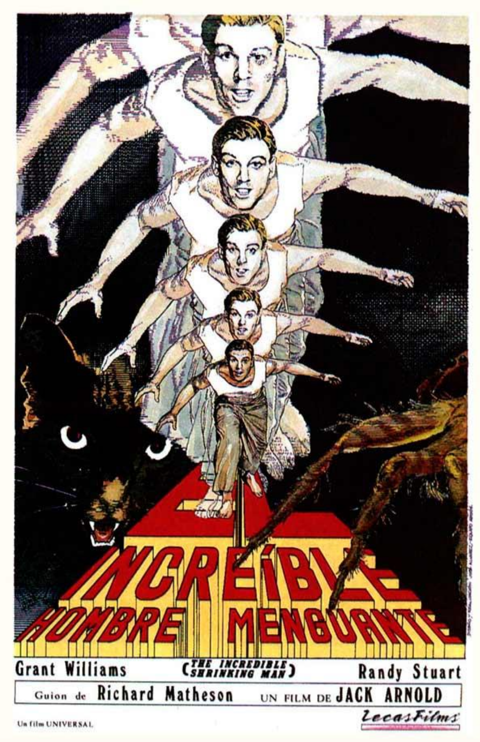
h) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si\ \ x>-1 \\ \dfrac{1}{x^2-9} & si\ \ x\le -1 \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}-1 & si\ \ x>0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ \ x\le 0 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & si\ \ -3\le x\le 0 \\ \ln x & si\ \ 0<x<1 \\ x-2 & si\ \ 1<x\le 7 \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2-2x} & si\ \ x\le 1 \\ \dfrac{1}{\ln(x-1)} & si\ \ 1<x<6 \\ x-2 & si\ \ 6<x \end{cases}$

Los infinitésimos



Entendemos por infinitésimo en *a*, a cualquier función que cumpla que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Por ejemplo:

(a) $f(x) = x$ en x = 0 es un infinitésimo en *x* = 0 ya que obviamente $\lim_{x \to 0} x = 0$

Que se expresa diciendo que cos(*x*) es un infinitésimo para (o en) *x* = π/2

(b) $f(x) = \ln(x+1)$ es un infinitésimo en *x* = 0 ya que obviamente:

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln(x+1)\right) = \ln\left(\lim_{x \to 1}(x+1)\right) = \ln 1 = 0$$

Que se expresa diciendo que ln (*x* + 1) es un infinitésimo para (o en) *x* = 0

(c) $f(x) = sen(x)$ ya que obviamente:

$$\lim_{x \to 0} sen(x) = sen\left(\lim_{x \to 0}(x)\right) = sen(0) = 0$$

Que se expresa diciendo que sen(*x*) es un infinitésimo para (o en) *x* = 0

(d) $f(x) = \cos(x)$ es un infinitésimo en *x* = π/2 ya que: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}(x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Que se expresa diciendo que cos(*x*) es un infinitésimo para (o en) *x* = π/2

Por lo tanto, disponemos de infinidad de funciones que son **infinitésimos** en algunos de sus puntos (no todas, claro *f* (*x*) = 3 no es *infinitesimal* en ningún punto). Eso quiere decir que dichas funciones se hacen tan pequeñas, sus valores *f* (*x*) son tan pequeños, como se desee, con tal de que los valores de *x* estén próximos al punto en el que la función es un infinitésimo. Pero no todos los **infinitésimos** son igual de “pequeños”. Vamos a compararlos

Anteriormente hemos presentado los siguientes límites, como ejemplos de expresiones indeterminadas.

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{4x - 4} = \frac{0}{0}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen}{x} = \frac{0}{0}$ (c) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x^2} = \frac{0}{0}$

Como todos los límites son del tipo 0/0 es claro que todas las funciones involucradas son infinitésimos en el punto *x* = 0. (por ejemplo $\lim_{x \to 1}(4x - 4) = 4 - 4 = 0$))

Sin embargo, los valores reales de los límites anteriores son muy diferentes:

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{4x - 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{4(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{4} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen}{x} = 1$ (c) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x^2} = \infty$

Cuando dos infinitésimos tienen como **límite de su cociente** 1, eso significa que son **equivalentes** y pueden sustituirse uno por otro en el cálculo de otros límites. Los importante es que el valor **1** indica que ambas funciones *sen* (*x*) y *x*, se acercan a 0 con la misma velocidad, decrecen igual de *deprisa*. Sin embargo, que el límite de (c) sea infinito, significa que cerca de 0, x^2 es mucho, mucho, pero mucho más pequeño que *sen* (*x*) cerca de *x* = 0, lo que hace que el denominador se haga más cero que el numerador en varios órdenes de magnitud, y que al realizar el cociente el valor se dispare. Como ves, comportamientos antagónicos entre entidades que se hacen tan minúsculas como deseamos, sin que valgan nunca 0. Bienvenido al cálculo infinitesimal, donde aprenderemos a comparar *tiny reality bites*.

Las indeterminaciones

A menudo cuando se calcula un límite en un punto procedemos del siguiente modo:

- Sustituimos x por el punto en el que se evalúa el límite a, obtenido como valor del límite $f(a)$.
- Si aparece un valor real, ese es el límite.

Pero a menudo nos encontramos con expresiones **NO evaluables**. Son las denominadas **indeterminaciones**, expresiones que pueden tomar **el valor que se desee** según la situación en la que nos encontremos.
Por ejemplo, los tres límites siguientes proporcionan una expresión INDETERMINADA: 0/0.
Y lo es porque en los tres casos siguientes **cada límite tiene un valor distinto** a pesar de que **todos son del tipo 0/0.** Realmente sus valores son: a) 2 , b) 1 c) ∞
.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{x^2-1}=\frac{0}{0}\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{sen}{x}=\frac{0}{0}\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x^2}=\frac{0}{0}$$

Por tanto, ni todas las **expresiones** que combinan **0** e ∞ son **indeterminaciones** o **expresiones indeterminadas, ni todas las indeterminaciones son irresolubles.**
Se verifican las siguientes “relaciones” entre 0, ∞ y un número real k:

No son indeterminaciones

$$\frac{k}{0}=\infty\quad \frac{k}{\infty}=0\quad \infty\pm k=\infty\quad \frac{\infty}{k}=\infty\quad \frac{0}{k}=0\quad \frac{0}{\infty}=0\quad \frac{\infty}{0}=\infty\quad k\cdot\infty=\infty$$
$$\infty^k=0\ si\quad k<0$$
$$\infty^k=\infty\ si\quad k>0$$
$$+\infty+\infty=+\infty\qquad -\infty-\infty=-\infty$$

Sí son indeterminaciones

$$\frac{0}{0}\quad \frac{\infty}{\infty}\quad \infty-\infty\quad 1^{\infty}\quad 0^0\quad 0\cdot\infty$$

Algunas de las cuales solo parecen en el cálculo de límites en el infinito y cuya (des)indeterminación exige técnicas especiales para cada tipo que irás estudiando este curso y los próximos.

Ilustración de indeterminaciones

Los siguientes límites ilustran casos de las siguientes **NO indeterminaciones**.

$$\frac{k}{0}=\infty\quad \frac{k}{\infty}=0\quad \infty\pm k=\infty\quad \frac{\infty}{k}=\infty\quad \frac{0}{k}=0\quad \frac{0}{\infty}=0\quad \frac{\infty}{0}=\infty\quad k\cdot\infty=\infty$$
$$\infty^k=0\ si\quad k<0$$
$$\infty^k=\infty\ si\quad k>0$$
$$+\infty+\infty=+\infty\qquad -\infty-\infty=-\infty$$

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{4-x}{x^2-1}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 1}4-x}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-1}=\left(\frac{4-1}{1-1}\right)=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{1-\ln x}\right)=\frac{\lim_{x\to 0} 4}{\lim_{x\to 0}(1-\ln x)}=\left(\frac{4}{1-\lim_{x\to 0}(\ln x)}\right)=\left(\frac{3}{1-(-\infty)}\right)=\left(\frac{3}{+\infty}\right)=0^{+}$

(c) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{3-x}{\ln(x^2-9)}\right)=\frac{\lim_{x\to 3} 3-x}{\lim_{x\to 3}\ln(x^2-9)}=\frac{\lim_{x\to 3} 3-x}{\ln\left(\lim_{x\to 3}(x^2-9)\right)}\left(\frac{3-3}{\ln(0)}\right)=\left(\frac{0}{-\infty}\right)=0$

(d) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x+2}=\left(\frac{1}{\lim_{x\to 1}(x-1)}\right)^{\lim_{x\to 1}(x+2)}=\left(\frac{1}{0}\right)^{3}=\infty^{3}=\infty$

(e) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(\frac{1}{\lim_{x\to 1}(x-1)}\right)^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{3}\right)}=\left(\frac{1}{0}\right)^{\frac{2}{3}}=\infty^{\frac{2}{3}}=0$

(f) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=\infty-\infty=¿?=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{(x-2)^2}\right)=\frac{-1}{0^2}=-\infty$

(g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=\infty-\infty=¿?=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x}\right)=\frac{0-1+1}{0}=\frac{0}{0}=¿?=0$

Pero cuidado: no todos los infinitésimos son equivalentes. Las funciones se hacen pequeñas, pero a distinto ritmo. **Por ello**

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x^2}=\frac{0}{0}=\infty$$

que señala que el comportamiento del seno de x y de la potencia x^2, es muy diferente, haciéndose -cerca de 0,- el denominador (x^2) mucho más pequeño que el numerador $sen(x)$. No son equivalentes: x^2 es un infinitésimo de orden 2 y sen(x) de orden 1.

Límites en el infinito

Cuando se calcula el <u>límite de una función en el infinito</u> se trata de determinar la **tendencia** que tendrá la función (los valores que toma) cuando la variable *x* se hace muy muy grande y positiva ($x \to +\infty$) o muy muy pequeña y negativa ($x \to -\infty$)
Si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

entonces esto significa que los valores de $f(x)$ se acercan a *k* tanto cuanto se desee con tal de que *x* sea suficientemente grande. Es decir, la gráfica de *f* se *aproxima* a la recta horizontal *y* = k cuando $x \to \pm\infty$. Dicha recta se denomina **asíntota horizontal** de *f*.

En cambio, si cuando *x* crece la función también crece sin control, se *dispara*, entonces esto significa que los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes cuanto se desee con tal de que *x* sea suficientemente grande:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

Es decir, la gráfica de *f* se NO *aproxima* a ninguna recta y se dice que tienen una RAMA PARABÓLICA.

Infames reglas de cálculo

Como norma general para el cálculo de un límite en el infinito **se sustituye la variable *x* por** ∞ y se calcula el límite. Este procedimiento es a menudo anómalo, pero produce resultados correctos.
Así, se verifican las siguientes "*relaciones*" entre 0, ∞ y un número real *k* (que ya hemos mencionado)

$$\frac{k}{0} = \infty \quad \frac{k}{\infty} = 0 \quad \infty \pm k = \infty \quad \frac{\infty}{k} = \infty \quad \frac{0}{k} = 0 \quad \frac{0}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad k \cdot \infty = \infty$$

$$\infty^k = 0 \ si \quad k < 0$$

$$\infty^k = \infty \ si \quad k > 0$$

$$+\infty + \infty = +\infty \quad -\infty - \infty = -\infty$$

El valor del límite es el resultado de tal sustitución **salvo que aparezcan** las temibles

INDETERMINACIONES: $\boxed{\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 1^{\infty} \quad 0^0 \quad 0 \cdot \infty}$

Reglas de cálculo

1.- Si $f(x)$ es un **POLINOMIO** de grado n: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n=\pm\infty$$

y no tiene asíntotas horizontales.
El valor de un polinomio

2.- Si f es una función de tipo **HIPÉRBOLA** $f(x)=\dfrac{k}{ax+b}$ entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

y tiene asíntota horizontal en la recta $y = 0$ (el eje OX).

3.- Si f es una función de tipo **RACIONAL** $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{grado numerador} < \text{grado denominador} \\ \infty & \text{si} \quad \text{grado numerador} > \text{grado denominador} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado numerador} = \text{grado denominador} \end{cases}$$

Siendo a_n el coeficiente de mayor grado de P_n y b_m el coeficiente de mayor grado de Q_m

La función tiene asíntota horizontal en la recta $y = 0$ en el primer caso y a la recta $y=\dfrac{a_n}{b_m}$ en el tercer caso. En el segundo caso pueden suceder dos situaciones que veremos después.

4.- Si $f(x)$ es una función RADICAL con radicando un polinomio de cualquier grado $f(x)=\sqrt[k]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0}$ entonces se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[k]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0}=\sqrt[k]{\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0}=$$

$$=\sqrt[k]{\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n}=a_n\cdot\sqrt[k]{\lim_{x\to\pm\infty}x^n}=+\infty$$

5.- Si $f(x)=\ln(g(x))$ entonces se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln(g(x))=\ln\left(\lim_{x\to\pm\infty}g(x)\right)$$

Y basta tener en cuenta que

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(x) \quad \text{no existe}$$

6.- Si $f(x)=e^{g(x)}$ entonces se cumple

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}e^{g(x)}=e^{\lim_{x\to\pm\infty}g(x)}$$

Y basta tener en cuenta que

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

7.- Generalizando el caso anterior se tiene que si $f(x) = k^{g(x)}$ entonces se cumple

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} k^{g(x)} = k^{\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)}$$

Y basta tener en cuenta que

k > 1	**0 < k < 1**
$\lim\limits_{x \to +\infty} k^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} k^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} k^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} k^x = \infty$

8.- Algunos ejemplos de lo anterior:

(a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n > 0^o$

(b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} kx^n = \pm\infty \quad \forall n > 0$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{\sqrt[n]{x}} = 0$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{5^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{6^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{1.5^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

(e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2^{-x}} = \lim\limits_{x \to \infty} 2^x = +\infty$

(f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{5^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{6^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1.5^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} log(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2(x) = +\infty$

(h) $\lim\limits_{x \to 0^+} log(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_2(x) = -\infty$

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} 0.5^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} 0.25^x = 0$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0.5^x = 0.5^{+\infty} = 0$

(k) $\lim\limits_{x \to -\infty} 0.5^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{0.5^x} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

9.- Si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \infty$$

Pueden darse dos circunstancias:

(a) La curva adopta una rama parabólica en $\pm\infty$.

En este caso $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{P_n(x)}{xQ_m(x)} = \pm\infty$

(b) La curva crece (o decrece) pero se ajusta a una recta oblicua.

En este caso se han de calcular los límites:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{xQ_m(x)} = m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - mx\right) = h$$

Y si m y h son números finitos entonces la curva se ajusta a la recta de ecuación ***y = mx +h***, que se llamará una **asíntota oblicua** de *f*.

Estudio de algunos casos importantes

e

El número **e**. se obtiene como límite de toda expresión siguiente:

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

Siempre que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

∞-∞

Este límite suele proceder:

(a) De la suma (o resta) de dos fracciones algebraicas.
La operación habitual es operar las fracciones hasta obtener una función racional y aplicar los límites del punto 4.

(b) De la resta de dos radicales.
La operación habitual es multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión radical. Si el límite se convierte en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se ha de dividir por el término de mayor grado de *x*.

1^{∞}

Estos límites proceden de una expresión exponencial y su valor está relacionado con el número **e**. El límite no ha de ser necesariamente en el infinito.

Supongamos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=1^{\infty}$$

El límite se calcula con la siguiente regla:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{l}$$

dónde l se obtiene como $l=\lim_{x\to a} g(x)\cdot(f(x)-1)$

0/0 ∞/∞

Este límite es muy común. Procede de multitud de límites.
En ambos casos se aplica la Regla de L'Hôpital sucesivamente hasta que desaparece la indeterminación.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siendo a = 0 o $a=\infty$

$$0 \cdot \infty$$

Este límite es muy común. Procede de multitud de límites.
En ambos casos se aplica la Regla de L'Hôpital después de trasformar el producto en cociente:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$$

Siendo $a = 0$ o $a = \infty$

Algunos casos típicos

(a) $\lim_{x\to\infty} senx =$ no existe

(b) $\lim_{x\to\infty} \cos x =$ no existe

(c) $\lim_{x\to\infty} tgx =$ no existe

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx = \infty$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

(h) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0$

(i) $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

(j) $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

(k) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

(m) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{p_n(x)} = +\infty$

(n) $\lim_{x\to +\infty} xe^x = +\infty$

(o) $\lim_{x\to -\infty} xe^x = +\infty$