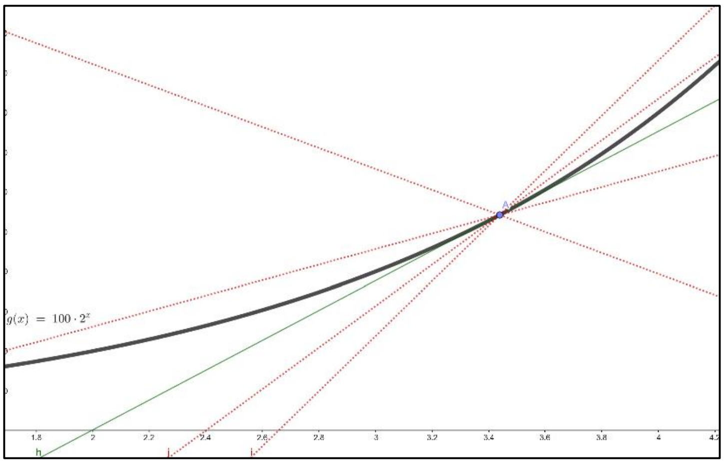
Aplicaciones de las tangentes

¿Por qué las tangentes?



Los conceptos de crecimiento o decrecimiento de una magnitud o de una función o de convexidad y concavidad de una curva, no necesitan del hecho de que la función en la que se estudien tenga derivada. Esos conceptos son previos a la limitación de que la función, la curva, tenga derivada y segunda derivada en todos sus puntos., son conceptos que existieron antes de que la derivada asomara su cabeza el siglo XVII. Por supuesto los conceptos no se definieron tal y como los estudiamos ahora hasta mucho después.

Crecimiento

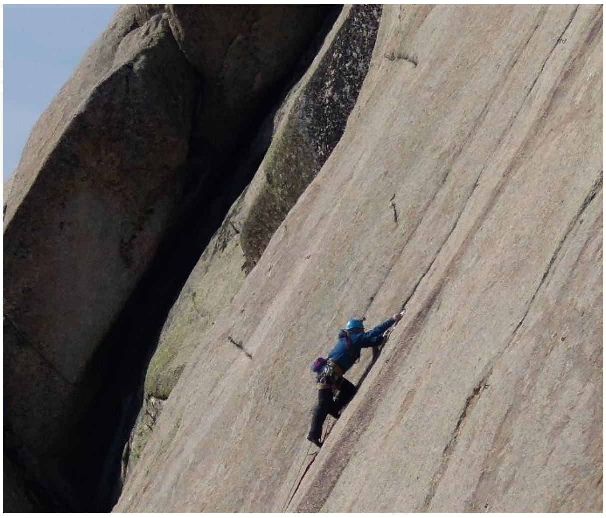
Si una magnitud se derivada de otra, decimos que la primera es creciente respecto de la segunda si un aumento de esta, conlleva el de la otra. Es decir, mantienen la desigualdad entre sus valores.

En una bombona de butano, a mayor temperatura se obtiene una mayor presión (y explota); en un globo aerostático el aumento de la temperatura provoca el aumento del volumen de globo (y lo hace flotar): magnitudes **crecientes,** Pero al disminuir el tamaño de un globo lleno de agua, aumenta la presión (y lo hace estallar): magnitudes **decrecientes**.

La tangente a una curva proporciona información sensible de la función que de otro modo sería muy difícil de obtener. Veamos a continuación cómo podemos analizar el **crecimiento** a través de las pendientes de las tangentes. En lo que sigue, supondremos que las funciones tienen derivada en los puntos adecuados

Por una pista de esquí pueden hacerse dos recorridos uno ascendente y otro descendente dependiendo de si la altura de la pista en la que nos encontramos, aumenta o disminuye mientras pasa (aumenta) el tiempo, y nos movemos.

Cuando subimos por una cuesta aumentamos nuestra altura, mientras que cuando la bajamos descendemos la altura a la que nos encontramos. En el primer caso la pendiente que debemos ascender



decimos que es **positiva**, mientras que al bajar la pendiente de la cuesta es **negativa**, así que podía haberse denominado al revés, pero fue de esta manera. ¿Será sólo por casualidad? No. Los ciclistas de montaña temen los repechos porque en ellos la pendiente aumenta, lo que no sería correcto si la pendiente fuese negativa.

Cuando llegamos a la cima de una montaña, exactamente en la cima, cualquier desplazamiento que hagamos será para bajar (estamos en la cúspide) y evidentemente cuando estamos en la cima estamos en la horizontal que está a máxima altura de la montaña, pero obviamente ni ascendemos ni descendemos, así que debemos aceptar que estamos en **horizontal**. Del mismo modo cuando bajamos por una ladera hasta alcanzar el rio que circula por el valle, iremos "pendiente abajo" (no nos cuesta esfuerzo), pero cuando lleguemos al río en el valle, al punto más bajo del mismo, no estaremos subiendo ni bajando y de nuevo estaremos en la horizontal.

Este símil sencillo nos proporciona un criterio sencillo para saber cuándo una función es creciente y cuando es decreciente.

- Si la función *f* es creciente en el intervalo I, y recuerda*, tiene tangente en todos sus puntos*, entonces en cada uno de los puntos de su gráfica la tangente debe tener pendiente POSITIVA, es decir formar un ángulo entre 0º y 90º.
- En cambio, si *f* es decreciente en el intervalo I, entonces en todos los puntos de la curva la tangente debe tener pendiente NEGATIVA, es decir formar un ángulo entre 90º y 180º.
- Además, hemos observado que cuando alcanzamos la cima de la montaña o la sima del valle, nuestra pendiente será horizontal, es decir forma un ángulo de 0º con la horizontal.

Si tenemos en cuenta que **la derivada de una función en un punto** nos proporciona exactamente **los valores de la pendiente de la curva**, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición

Si la función f es estrictamente creciente en el intervalo I, y *tiene tangente en todos los puntos*, del intervalo, entonces la derivada es POSITIVA en todos los puntos de dicho intervalo.

Si la función f es estrictamente decreciente en el intervalo I, y *tiene tangente en todos los puntos*, del intervalo, entonces la derivada es NEGATIVA en todos los puntos de dicho intervalo.

Si la función f tiene un máximo o un mínimo en un punto **interior** de ese intervalo I, entonces la derivada en ese punto es 0.

Así estudiando las **pendientes de las rectas tangentes** podemos determinar el crecimiento de una función y localizar los puntos de **tangente horizontal**, que son **candidatos** a ser máximos o mínimos. Y recuerdo que estudiar rectas (tangentes) es más fácil que estudiar curvas (gráficas).

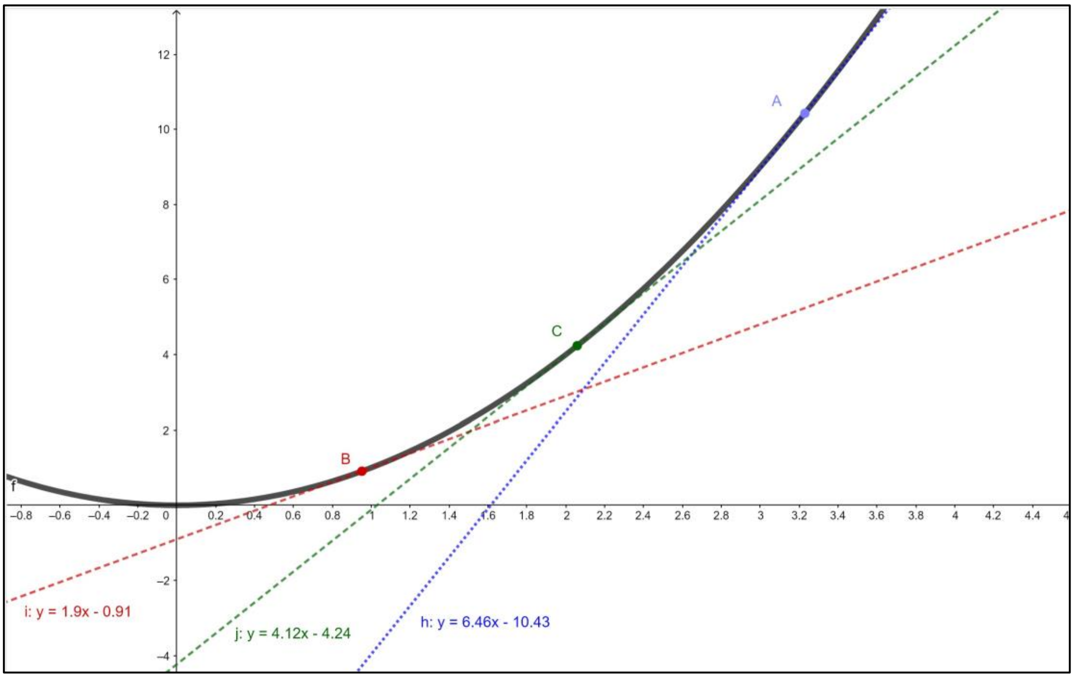
Definición

La **inclinación** de una curva en un punto es la **pendiente** de la recta tangente a ella (sea eso lo que sea).

Curvatura

La curvatura es un concepto muy complejo que trata de explicar cómo pueden ser las curvas según la forma que tengan de *curvarse*. En el mundo cotidiano, esta experiencia la tenemos cuando nos expresamos: por ejemplo, decimos que me "ha salido un chichón" o que "la pared tiene una panza". Todos tenemos la intuición de que la forma en la que se curva una pelota es hacia fuera, mientras que una palomitita de bádminton se curva hacia dentro. Las ideas parecen claras, pero los términos que utilizamos para referirnos a esta propiedad generan confusión en nuestra vida cotidiana: una cueva es una **región convexa para un matemático**, pero la gente dice que una **cueva es cóncava**. Hablamos de la concavidad de los ojos para referirnos a los espacios craneales donde se insertan los globos oculares. Esos huecos son regiones convexas, no cóncavas para un matemático.

Ahora nos referimos a la **concavidad** y **convexidad** de una curva en un intervalo *I*.[1]



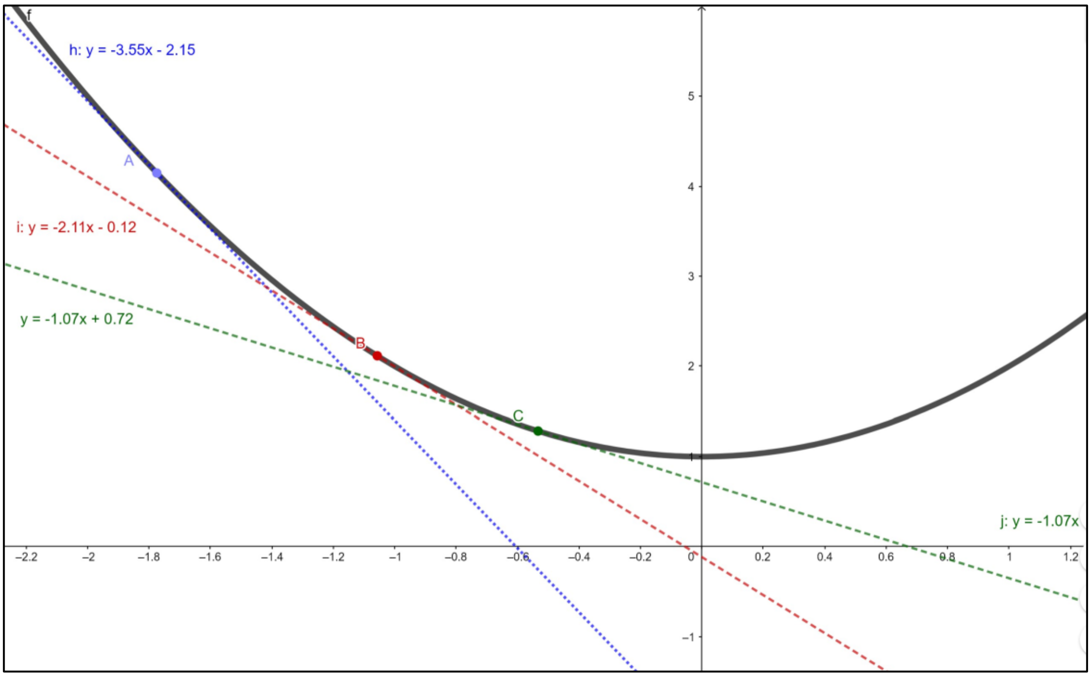
Esta función es convexa y creciente.

Observa que las pendientes de las rectas azul, roja y verde son crecientes.

La curva anterior y la siguiente, son **convexas**. Observa que los puntos B, C y A de la gráfica tienen abscisas crecientes. Y observa que las **pendientes** de las **rectas tangentes aumentan** de B a C y de C a A. Es decir, las **pendientes** de las **rectas tangentes** son **crecientes** en el intervalo I en el que la función es convexa. Por tanto, la función f' es creciente en el intervalo.

Y por tanto **la derivada de la derivada**, (**si es que existe**) será **positiva.** Los valores de f' aumentan al aumentar . No se debe confundir la convexidad con el crecimiento. Se pude ser convexa y decreciente.

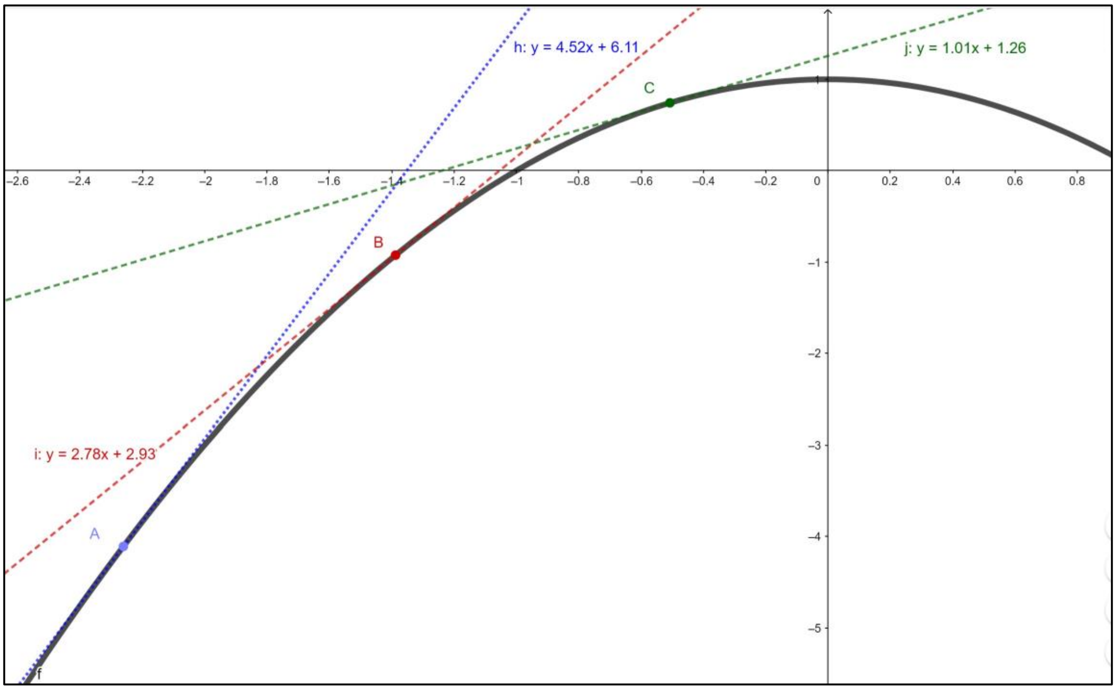
[1] Se reduce la definición a un intervalo porque son los conjuntos convexos habituales de la recta real. Para la definición general se necesita un dominio convexo.



Esta función es convexa y decreciente.

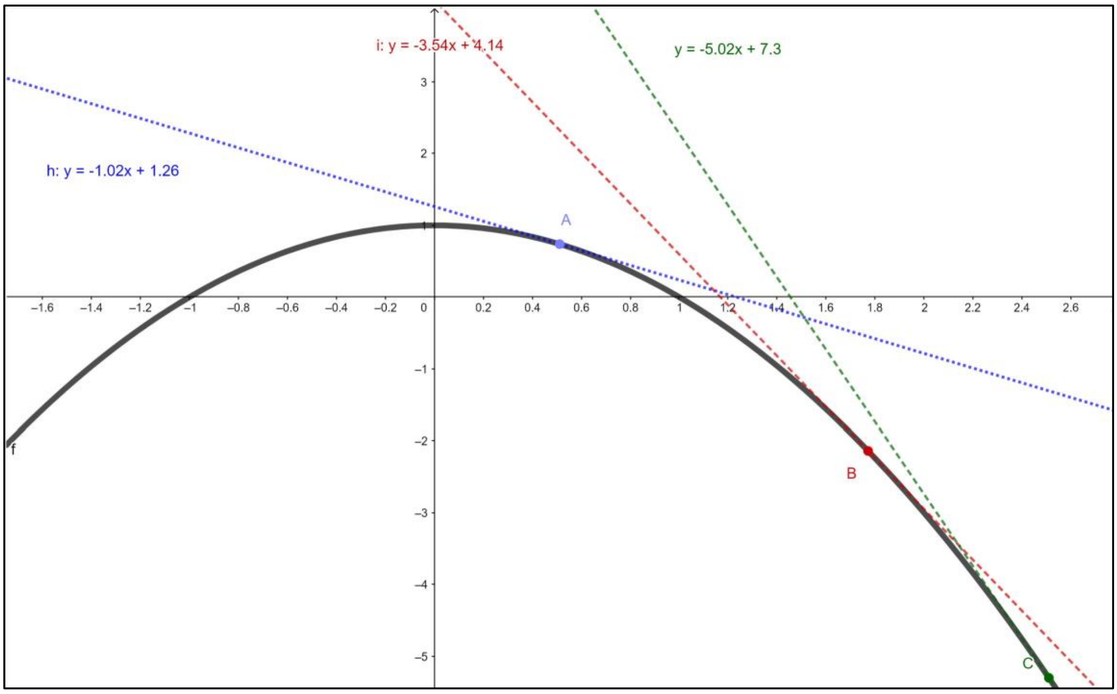
<u>Cuidado</u>. Las pendientes de las rectas azul, roja y verde son crecientes porque son números negativos.

Las dos gráficas representadas a continuación son en cambio, **cóncavas**. Observa que los puntos A, B, y C de la gráfica tienen abscisas crecientes. Y observa que las pendientes de las rectas tangentes disminuyen de A a B y de B a C. Es decir, **las pendientes de las rectas tangentes son decrecientes** en el intervalo I en el que la función es cóncava. Por tanto, la función f' es **decreciente** en el intervalo.



Esta función es cóncava y creciente.

Observa que las pendientes de las rectas azul, roja y verde son decrecientes.



Esta función es cóncava y decreciente.

<u>Cuidado</u>. Las pendientes de las rectas azul, roja y verde son decrecientes porque son números negativos.

Y por último la gráfica representada a continuación es endiablada. Observa lo que sucede en **todo intervalo *I* que contenga al origen de coordenadas**. La función tiene un comportamiento anómalo porque los puntos C, A, y B de la gráfica tienen abscisas crecientes. Pero observa que las pendientes de las rectas tangentes disminuyen de C a A, y aumenta de A a B o de C a B. No respeta la inclinación de las pendientes, el aumento de la abscisa. Es decir, **las pendientes de las rectas tangentes** son **crecientes/decrecientes** en el intervalo I. No es cóncava ni convexa: en el origen de coordenadas cambia el signo de la curvatura. Por ello sucede este comportamiento.

Ahora, las **pendientes** de las **rectas tangentes** son **decrecientes** si tomamos intervalos del tipo $I = (k, 0)$.

Pero las **pendientes** de las **rectas tangentes** son **crecientes** si observamos intervalos del tipo $I = (0, k)$.