Derivadas con esfuerzo

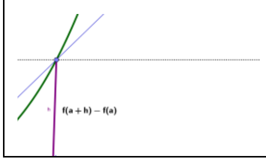
Cálculo de derivadas con la definición.

Otras formas de escribir la derivada en un punto

En la definición de derivada en un punto $\boldsymbol{a}$ de la función $\boldsymbol{f}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\boldsymbol{h}$ representa el cambio en la variable x, el **aumento** (o la disminución) en el eje OX que hay entre el punto en el que calculamos la derivada (a) y el punto desde el que trazamos la secante $(a+h)$.



$\boldsymbol{h}$ se denomina el **incremento** o la variación de x, y se escribe $\boldsymbol{\Delta x}$ que se lee "delta x" o "**incremento** de x". Con este cambio de notación la definición de derivada en el punto $\boldsymbol{a}$ queda:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Del mismo modo el numerador del cociente incremental expresa la variación que sufre la función entre el valor en el punto a, $f(a)$, y el valor en a+ h, $f(a+h)$. A la diferencia ,
$f(a+h)$ - $f(a)$ se la denomina "**variación de la función**" o **incremento** de f, y se escribe como $\boldsymbol{\Delta f}$.
Con ello la definición de derivada puede escribirse como:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

(que se lee "el límite del cociente incremental entre la variación de la función f y la variación de x cuando la variación de x tiende a cero").
A partir de esa notación Leibniz introdujo la notación para la derivada en un punto:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

Y para la función derivada:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$$

Aún hay otra manera de escribir el cociente incremental.
El punto $\boldsymbol{a}$ se denomina también $\boldsymbol{x_0}$ y al punto $a + \mathrm{h} = a + \Delta x$ se le denomina sencillamente x, ya que es un valor de la coordenada X que es variable y que se acerca a $\boldsymbol{a}$.
Con este cambio $\boldsymbol{a + h = x}$ o $\boldsymbol{h = x - a}$
y basta observar que entonces si $\boldsymbol{h \to 0}$ equivale a que $\boldsymbol{x \to a}$ (o que $\mathbf{x} \to \boldsymbol{x_0}$) con lo que la definición queda:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Calcular derivadas con la definición

1.- Determinar con la definición de derivada la derivada de $f(x) = 3x+1$ en $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)+1-4}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$$

2.- Determinar con la definición de derivada la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{1+h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(1+h)} = -1$$

Ahora para hallar la derivada en un punto cualquiera $\boldsymbol{a}$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(a+h)a}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(a+h)a} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$$

3.- Determinar con la definición de derivada la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

4.- Determinar con la definición de derivada la función derivada de $f(x) = \ln(x)$ en $x = a$ *(opcional)*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{l}{h}\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\ln\left(\frac{a+h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{h}}\right)^{\frac{a}{h}\frac{1}{a}}\right)=$$

$$=\ln\left(\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{h}}\right)^{\frac{a}{h}}\right)^{\frac{1}{a}}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{a}$$