La Regla de Bernoulli -L'Hôpital

Adiós a las indeterminaciones

La conocida **Regla de L'Hôpital**, recibe su nombre por Guillaume François Antoine de l'Hôpital**,** Marqués de L´Hôpital (a la izquierda) es en realidad un **teorema** de **Johann Bernoulli,** (a la derecha) hermano de **Jakob Bernoulli** (el autor del importante Teorema de los Grandes Números). Cuenta la historia que el famoso y acaudalado marqués francés, pagó un oneroso salario anual al matemático suizo para que le impartiera clases particulares de un curso de cálculo infinitesimal bajo secreto. El resumen de dicho intercambio se plasmó en la obra del francés *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (1696) que pasó a ser un referente europeo como libro de texto de cálculo diferencial. Parece que el marqués no quiso apropiarse del teorema de Bernoulli, como lo atestigua que reconociera -en una corta frase- en la introducción del *Analyse* la autoría de los resultados debidos al suizo; de hecho, en el texto no puso su nombre al teorema. Sin embargo, el uso del texto hizo que pasara como Regla de L´Hôpital. A la muerte del marqués, Bernoulli trató sin éxito, que fuera reconocida su autoría; pero no fue hasta 1922 cuando se encontraron unos textos de Johann que le dieron póstumamente la razón. Es muy raro encontrar un texto académico que proponga el título de "*Regla de Bernoulli-L'Hôpital*" Sobre la controversia puedes consultar este enlace.

El gran *truco* de la regla de Bernoulli-L'Hôpital

A. La tendencia del cociente de dos infinitésimos, es igual que la tendencia de las pendientes de las rectas tangente de sus gráficas.
B. La tendencia del cociente de dos infinitos, es igual que la tendencia de las pendientes de las rectas tangente de sus gráficas.

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}= \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}= \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dónde a puede ser ∞

Teorema de Bernoulli –L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto $x = a$ y tales que

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

Entonces se verifica que si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ entonces tiene el mismo valor que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Además, si $\boldsymbol{a} = \infty$ o si $\boldsymbol{l} = \infty$ el teorema también es cierto.

Ejemplos

- $$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$
- $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$
- $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \left[e^{\infty}\right] = \infty$$
- $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sen2x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \left[\frac{sen\pi}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x}{1} = 2$$
- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \cdot \ln 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2^x \cdot x \cdot \ln 2 = \left[+\infty \cdot +\infty \cdot \ln 2\right] = +\infty$$

¿Y qué sucede con las restantes indeterminaciones?

A. Límites $\mathbf{0} \cdot \infty$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \left[0 \cdot \infty\right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \left[0 \cdot \infty\right] = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Hay que tener mucho cuidado al escoger la función que ocupa el numerador. El denominador es una inversa y pude resultar harto complicado.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=\left[0\cdot(-\infty)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\dfrac{-1}{x}}{\left(\ln x\right)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{-\left(\ln x\right)^2}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\ln x\right)^2}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0$$

Pero es mucho más sencillo:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=\left[0\cdot(-\infty)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

B. Límites $\infty - \infty$

Operar las fracciones y aplicar B -L'H. Incluso se puede **aplicar dos veces la regla**:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right]=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{senx+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{\cos x+\cos x-xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2\cos x-xsenx}=\frac{0}{2-0}=0$$

También puede usarse la siguiente equivalencia que suele conducir a operaciones algebraicas nada sencillas:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}=\frac{\left[\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}\right]}{\left[\dfrac{1}{\infty}\right]}=\left[\frac{0-0}{0}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Puedes torturarte con:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x\ln x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)'}=\left[\cdots\right]$$